Cocher la/les case(s) correspondant à la/aux bonne(s) réponse(s). N'imprimer que la première page si nécessaire.

1) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

a A représente une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$;

b A représente une application injective ;

c A représente une application surjective. réponse

---

2) Mêmes notations que ci-dessus.

a $A.B$ et $B.A$ existent et sont carrées ; b $A = B^{-1}$;

c $\operatorname{rg}(A.B) = \operatorname{rg}(B.A)$. d $\det(A.B) = \det(B.A)$. réponse

---

3) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a $\operatorname{rg}(A) = 1$; b $\operatorname{rg}(A) = 2$; c A est inversible. réponse

---

4) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et f l'endomorphisme canoniquement associé.

a $\operatorname{rg}(A) \leqslant \inf(n,p)$; b $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$; c $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$; c $\operatorname{rg}(A) = n$ si et seulement si f est surjective.
réponse

---

5) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a A est une matrice de symétrie ; b $\det(A) = 1$; c A est semblable à I_3. réponse

---

6) Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a $\det(U) = -1$; b $U \sim I_3$; c $U^3 = I_3$; d $\det(I_3 + U) = 0$. réponse

---

7) Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$:

a $\det(A^2) = (\det(A))^2$; b $\det(A.B) = \det(A)\det(B)$; c $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

d $\det(A) = 0 \iff \operatorname{Ker}(A) = \{0\}$. réponse

---

8) Pour toutes $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$;

a $\det(M) = \det(A)\det(B)$; b $\det(M) = (-1)^n \det(A)\det(B)$; c $\det(M) = \det(A)^2\det(B)^2$;

d $\det(M) = \det(A) + \det(B)$; réponse

---

9) Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a toujours

a $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(A)$; b $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(B)$; c $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$; d $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(A)\operatorname{rg}(B)$; réponse

1) *On considère les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{a}$ *A représente une application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *;*

$\boxed{b}$ *A représente une application injective ;*

$\boxed{c}$ *A représente une application surjective.*

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

A, matrice à 3 colonnes et deux lignes, représente une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, donc $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse. Comme $A.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, A ne représente pas une application injective : $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. $\operatorname{rg}(A) = 2$ donc A représente une application surjective. $\boxed{c}$ est vraie. retour au QCM

2) *Mêmes notations que ci-dessus.*

$\boxed{a}$ *$A.B$ et $B.A$ existent et sont carrées ;*

$\boxed{b}$ $A = B^{-1}$;

$\boxed{c}$ $\operatorname{rg}(A.B) = \operatorname{rg}(B.A)$.

$\boxed{d}$ $\det(A.B) = \det(B.A)$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{c}}$.

Comme A et B sont de formats respectifs $(2,3)$ et $(3,2)$, $A.B$ et $B.A$ sont de formats respectifs $(2,2)$ et $(3,3)$. $\boxed{\text{a}}$ est vraie. A, non carrée, n'est pas inversible dans $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. $\operatorname{rg}(A.B) = \operatorname{rg}(B.A) = 2$ donc $\boxed{\text{c}}$ est vraie. Puisque $\operatorname{rg}(B.A) = 2$ et que $B.A$ est de format $(3,3)$, $\det(B.A) = 0$; comme $\operatorname{rg}(A.B) = 2$ et que $A.B$ est de format $(2,2)$, $\det(A.B) \neq 0$ (le calcul donne effectivement $\det(A.B) = 54$). $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse. retour au QCM

3) *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{a}$ $\operatorname{rg}(A) = 1$; $\boxed{b}$ $\operatorname{rg}(A) = 2$; $\boxed{c}$ *A est inversible.*

....

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{a}}$.

Comme les colonnes de A sont proportionnelles, un pivot de Gauss aboutit à une seule colonne non nulle. Donc $\operatorname{rg}(A) = 1$, et $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. De plus, $\operatorname{rg}(A) < 3$, donc $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse. retour au QCM

4) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *et* f *l'endomorphisme canoniquement associé.*

$\boxed{a}$ $\mathrm{rg}(A) \leqslant \inf(n,p)$; $\boxed{b}$ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$; $\boxed{c}$ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$; $\boxed{d}$ $\mathrm{rg}(A) = n$ *si et seulement si* f *est surjective.*

....

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$, $\boxed{\mathbf{c}}$ **et** $\boxed{\mathbf{d}}$.

Chaque colonne de A est formée des n coordonnées des images par f des vecteurs de la base canonique, donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. $\boxed{c}$ est vraie et $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. De plus, $\mathrm{Im}(A) \subset R^n$ donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant n$; $\dim(f(E)) \leqslant \dim E$ donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant p$. $\boxed{a}$ est vraie.

Comme $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^n$ det $\dim \mathbb{R}^n = n$, donc $\mathrm{rg}(A) = n$ équivaut à $\mathrm{Im}(A) = R^n$ (inclusion et égalité des dimensions), c'est-à-dire à la surjectivité de f. retour au QCM

5) *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{a}$ *A est une matrice de symétrie ;* $\boxed{b}$ $\det(A) = 1$; $\boxed{c}$ *A est semblable à* I_3.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathrm{a}}$.

$A^2 = I_3$ donc A est une matrice de symétrie : $\boxed{\mathrm{a}}$ est vraie. Un calcul rapide ($L_1 \rightleftharpoons L_3$) montre que $\det(A) = -1$ donc $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. A et I_3 n'ont pas le même déterminant, donc ne sont pas semblables. $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse.

retour au QCM

6) *Soit* $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{a}$ $\det(U) = -1$; $\boxed{b}$ $U \sim I_3$; $\boxed{c}$ $U^3 = I_3$; $\boxed{d}$ $\det(I_3 + U) = 0$.

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathbf{c}}$.

$\det(U) = 1$ donc $\boxed{\cancel{a}}$ est fausse. $\mathrm{tr}(U) = 0$ et $\mathrm{tr}(I_3) = 3$ donc $\boxed{\cancel{b}}$ est fausse. Un calcul rapide montre que $U^3 = I_3$: $\boxed{c}$ est vraie. $\det(I_3 + U) = 2 = \det(I_3) + \det(U)$, donc $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse. retour au QCM

7) *Soit* $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ *:*

$\boxed{a}$ $\det(A^2) = (\det(A))^2$; $\boxed{b}$ $\det(A.B) = \det(A)\det(B)$; $\boxed{c}$ $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

$\boxed{d}$ $\det(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$.

. . . .

Réponses justes : $\boxed{\mathbf{a}}$ **et** $\boxed{\mathbf{b}}$ $\boxed{a}$ et $\boxed{b}$ est font partie du cours. $\boxed{\cancel{c}}$ est fausse (signalé dans le cours). $\det(A) = 0$ lorsque A est non inversible, alors que $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0\}$ lorsque A est inversible. $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse.

retour au QCM

8) *Pour toutes* $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, *et* $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$ *;*

$\boxed{a}$ $\det(M) = \det(A)\det(B)$; $\boxed{b}$ $\det(M) = (-1)^n \det(A)\det(B)$; $\boxed{c}$ $\det(M) = \det(A)^2 \det(B)^2$;

$\boxed{d}$ $\det(M) = \det(A) + \det(B)$;

. . . .

Réponse juste : $\boxed{\mathrm{b}}$.

Les échanges $L_k \rightleftharpoons L_{n+k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ transforment M en $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, en multipliant le déterminant par $(-1)^n$, donc

$\boxed{\mathrm{b}}$ est vraie et $\boxed{\mathrm{a}}$ est fausse si n est impair.

$\boxed{\cancel{c}}$ est fausse en général ; $\boxed{\cancel{d}}$ est fausse en général (si $\det(A) + \det(B) \neq \det(A)\det(B)$) retour au QCM

9) *Soit* $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$*, on a toujours*

$\boxed{a}$ $\mathrm{rg}(AB)\leqslant\mathrm{rg}(A)$; $\boxed{b}$ $\mathrm{rg}(AB)\leqslant\mathrm{rg}(B)$; $\boxed{c}$ $\mathrm{rg}(AB)=\mathrm{rg}(A)+\mathrm{rg}(B)$; $\boxed{d}$ $\mathrm{rg}(AB)=\mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$;

....

Réponses justes : $\boxed{\mathrm{a}}$ **et** $\boxed{\mathrm{b}}$. Appelons α et β les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement, alors $\alpha(\beta(E))\subset\alpha(E)$ donc $\mathrm{rg}(AB)\leqslant\mathrm{rg}(A)$; $\dim(\alpha(\beta(E)))\subset\dim(\beta(E))$, donc $\mathrm{rg}(AB)\leqslant\mathrm{rg}(B)$. $\boxed{\mathrm{a}}$ et $\boxed{\mathrm{b}}$ sont vraies.

Il en résulte qu'en général, $\mathrm{rg}(AB)>\mathrm{rg}(A)+\mathrm{rg}(B)$ (sauf si $A=B=(0)$) et $\mathrm{rg}(AB)>\mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$ (sauf si $\{\mathrm{rg}(A),\mathrm{rg}(B)\}\subset\{0,1\}$). $\boxed{\cancel{c}}$ et $\boxed{\cancel{d}}$ sont fausses. retour au QCM