

**CHAPITRE 14**

**COURBES ET SURFACES**

2024/2025

**1 Courbes du plan définies par une équation cartésienne**

Dans cette section, on considère le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Définition : courbe de niveau**

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; la **ligne de niveau** de  $f$  associée à la valeur  $\lambda$  est l'ensemble des points du plan de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant l'équation cartésienne  $f(x, y) = \lambda$ .

Un exemple important : les coniques définies par des équations cartésiennes  $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey = \lambda$ .

**Propriété 1 : tangente à une courbe définie**

Un point  $M_0 : (x_0, y_0)$  d'une ligne de niveau de  $f$  est régulier si, et seulement si,  $\nabla f(M_0) \neq \vec{0}$ . Dans ce cas, le gradient  $\nabla f(M_0)$  est normal à la ligne en  $M_0$ .

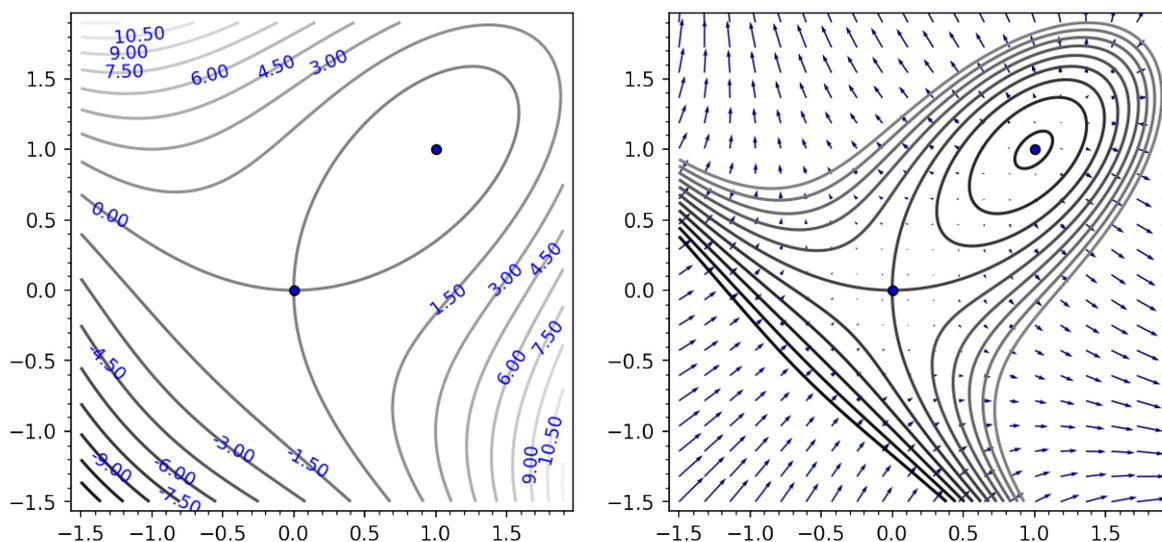
**Exemple 1**

On considère  $f$  définie par  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . Alors  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\nabla f = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$ .

Les points critiques de  $f$  sont les solutions du système  $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$ , c'est-à-dire  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}_\lambda$  la courbe d'équation cartésienne  $x^3 + y^3 - 3xy = \lambda$  et  $M_0 : (x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{C}_\lambda$  distinct de  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ . Alors  $x_0^3 + y_0^3 - 3x_0y_0 = \lambda$ .

La tangente à  $\mathcal{C}_\lambda$  en  $M_0$  est orthogonale à  $\nabla f(M_0) = 3(x_0^2 - y_0, y_0^2 - x_0)$ , donc a pour équation cartésienne  $\overrightarrow{M_0M} \cdot \nabla f(M_0) = 0$  soit  $(x_0^2 - y_0)(x - x_0) + (y_0^2 - x_0)(y - y_0) = 0$  et encore  $(x_0^2 - y_0)x + (y_0^2 - x_0)y = x_0^3 + y_0^3 - 2x_0y_0 = x_0y_0$ .



lignes de niveau de  $f$ , avec les points singuliers et le gradient.

On se place maintenant dans l'espace affine euclidien  $\mathcal{E}_3$  muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**2 Courbes et surfaces de  $\mathbb{R}^3$  paramétrées**

**2.1 Paramétrage de courbes spatiales**

**Définition : courbe spatiale**

On désigne par **courbe spatiale (ou gauche)** une courbe de l'espace  $\mathbb{R}^3$  qui n'est pas *a priori* incluse dans un plan. Une telle courbe  $C$  est définie par la donnée d'une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}^3 : t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ .

**Définition : point régulier**

Soit  $t_0 \in I$ , on dit que  $M(t_0)$  est **régulier** lorsque  $\vec{M}'(t_0) \neq \vec{0}$ .

On suppose que tous les points de  $C$  sont réguliers, c'est-à-dire que  $\vec{F}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et que  $\vec{F}' = \vec{M}'$  ne s'annule pas sur  $I$ .

**Propriété 2 tangente à la courbe en un point régulier**

La tangente en un point de  $C$  est dirigée par  $\vec{V} = \vec{M}'(t)$ , et donc par le vecteur normé  $\vec{T} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ .

**2.2 Paramétrage de surfaces**

**Définition : surface**

Une surface  $(\Sigma)$  est une partie de  $E$  définie par une représentation paramétrique, c'est-à-dire une fonction  $\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E$

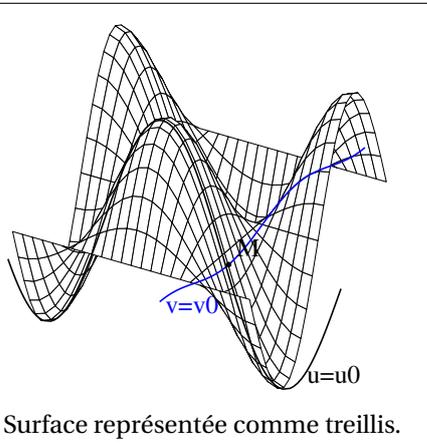
$$x \rightarrow x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} :$$

$$M \in (\Sigma) \iff \exists(u, v) \in \Omega, \quad \vec{OM} = \vec{\varphi}(u, v)$$

**▲** il y a deux paramètres!

Définir une surface par la représentation paramétrique  $\vec{\varphi}$  revient à la considérer comme la réunion des courbes spatiales  $C_v : u \rightarrow \vec{\varphi}(u, v)$  ou comme la réunion des courbes spatiales  $G_u : v \rightarrow \vec{\varphi}(u, v)$ .

Ceci correspond au dessin classique de la surface comme *un treillis* : un nombre fini de courbes  $C_v$  se croisant avec un nombre fini de courbes  $G_u$ , appelées *courbes coordonnées*.

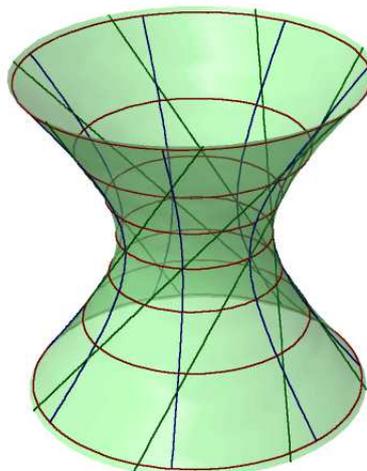
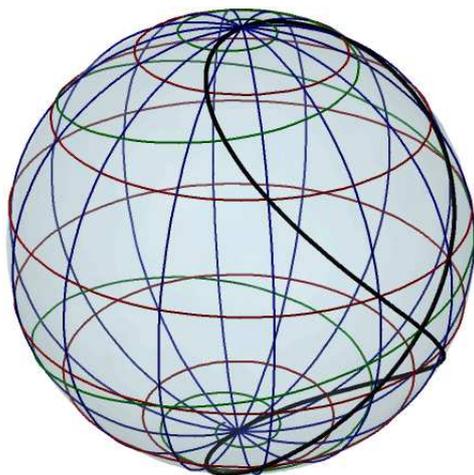


**Définition : courbe tracée sur une surface**

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe spatiale, et  $(\Sigma)$  une surface. On dit que la courbe  $\mathcal{C}$  est **tracée sur**  $(\Sigma)$  si tous les points de  $\mathcal{C}$  appartiennent à  $(\Sigma)$ .

*Ci-contre :*

*diverses courbes tracées sur la sphère et sur l'hyperboloïde de révolution*



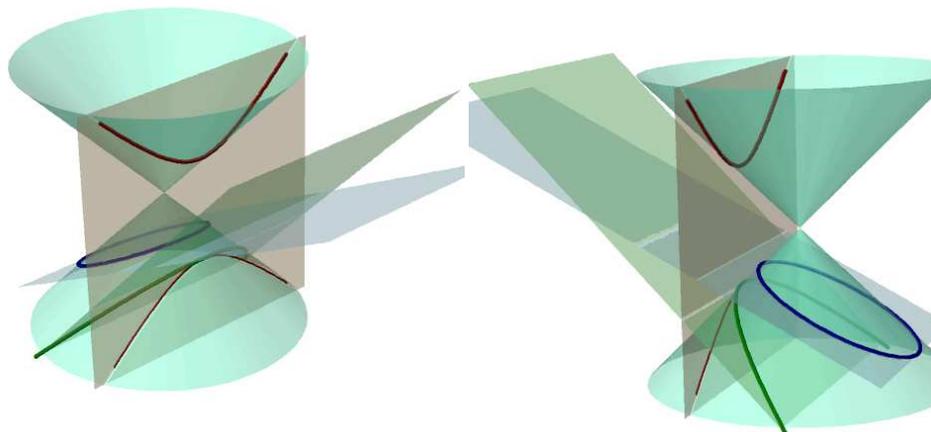
**Définition : sections planes d'une surface**

Soit  $(\Sigma)$  une surface, et  $\Pi$  un plan. L'intersection de  $(\Sigma)$  avec  $\Pi$  est une courbe plane appelée **section plane** de  $(\Sigma)$ .

*Ci-contre :*

*Sections d'un cône [de révolution] par des plans*

*Ce sont des coniques.*



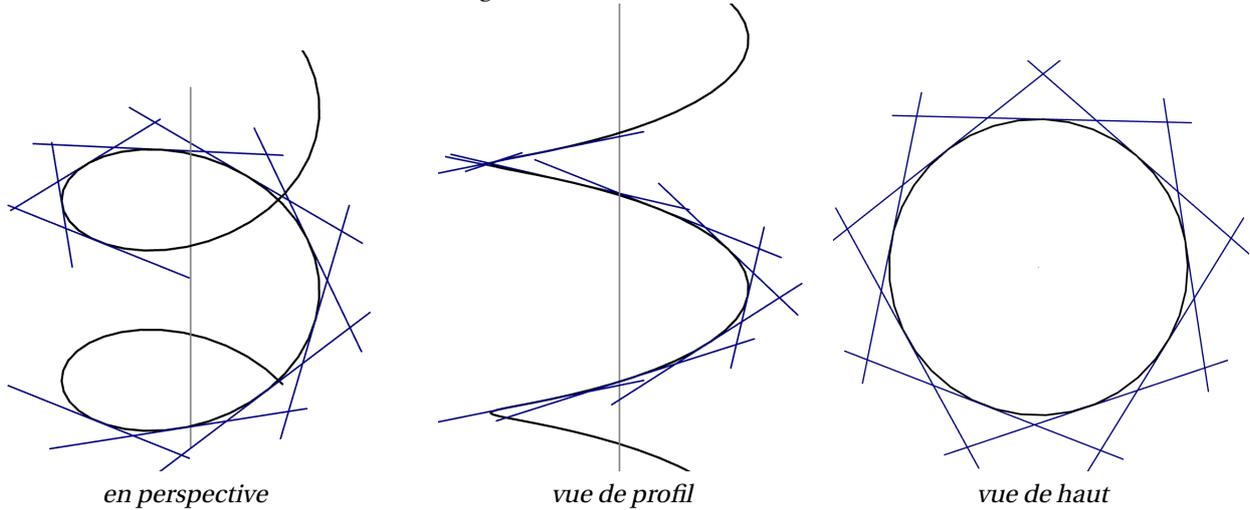
**Définition : point régulier d'une courbe paramétrée**

Comme pour une courbe plane, un point d'une courbe spatiale paramétrée par la fonction vectorielle  $t \in I \mapsto \vec{M}(t)$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , est dit **régulier** si  $\vec{M}'(t) \neq \vec{0}$ .  
 Dans le cas contraire, il est dit **singulier** ou **stationnaire**.

**Propriété 3 : tangente en un point régulier d'une courbe paramétrée**

On considère une courbe spatiale  $\mathcal{C}$  paramétrée par la fonction vectorielle  $t \in I \mapsto \vec{M}(t)$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et  $M(t_0)$  un point régulier de  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire que  $\vec{M}'(t_0) \neq \vec{0}$ .  
 Alors la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M(t_0)$  est la droite  $(M(t_0); \vec{M}'(t_0))$

tangentes à une hélice droite



**2.3 Plan tangent à une surface en un point régulier**

**Définition : point régulier d'une surface paramétrée**

Soit  $(\Sigma)$  une surface définie par le paramétrage  $(u, v) \in \Omega \mapsto M(u, v)$ .  
 Un point  $M_0 = M(u_0, v_0)$  de  $(\Sigma)$  est dit **régulier** lorsque les vecteurs  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u_0, v_0)$  ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si  

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \neq \vec{0}$$
  
 Dans le cas contraire, il est dit **singulier** ou **stationnaire**.

**Remarque :** les points d'une surface placés sur un pli, sur une pointe ou au bord de cette surface, sont singuliers.

**Définition : vecteur normal, plan tangent**

Si  $\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \neq \vec{0}$ , le vecteur  $\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$  est appelé **vecteur normal** à  $(\Sigma)$  en  $M_0$ , et le plan passant par  $M_0$  et dirigé par  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  est **le plan tangent** à  $(\Sigma)$  en  $M_0$ .  
 La droite passant par  $M_0$  et dirigée par  $\vec{N}$  est appelée **droite normale** à la surface à  $M_0$ .

**Exemple 2**

On considère le paramétrage :  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mapsto \vec{OM}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$ , ce que l'on note par  $\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \end{cases}$ .

On vérifie aisément que  $x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + \cos^2 v = \sin^2 v + \cos^2 v = 1$ , donc la surface ainsi définie est incluse dans la sphère de centre  $O$  et de rayon 1 :  $\|\vec{OM}(u, v)\|^2 = 1$ .

On peut même vérifier que tous les points de la sphère sont atteints par au moins une valeur de  $(u, v)$  : les pôles correspondent à  $v = 0$  et  $v = \pi$  ( $u$  quelconque), et l'équateur à  $v = \frac{\pi}{2}$ .

Alors  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$ , donc  $\vec{OM}(u, v) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = -\sin v \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} = -\sin v \vec{OM}(u, v)$ .

Il en résulte que les deux pôles sont des points singuliers (liés au paramétrage) et que le plan tangent à tout autre point est dirigé par la verticale  $\vec{OM}(u, v)$

Note : les deux vecteurs tangents  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  sont respectivement dirigés vers l'Ouest et le Sud.

### 3 Surfaces définies par une équation cartésienne

**Définition : Équation cartésienne explicite**

Soit  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , alors l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y, g(x, y))$  constitue la **surface définie par l'équation cartésienne explicite**  $z = g(x, y)$ .  
 $(\Sigma) = \{M : (x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in U\}$

**Remarque :** Ceci équivaut à un paramétrage  $U \ni (u, v) \rightarrow (u, v, g(u, v))$

#### Propriété 4 : plan tangent

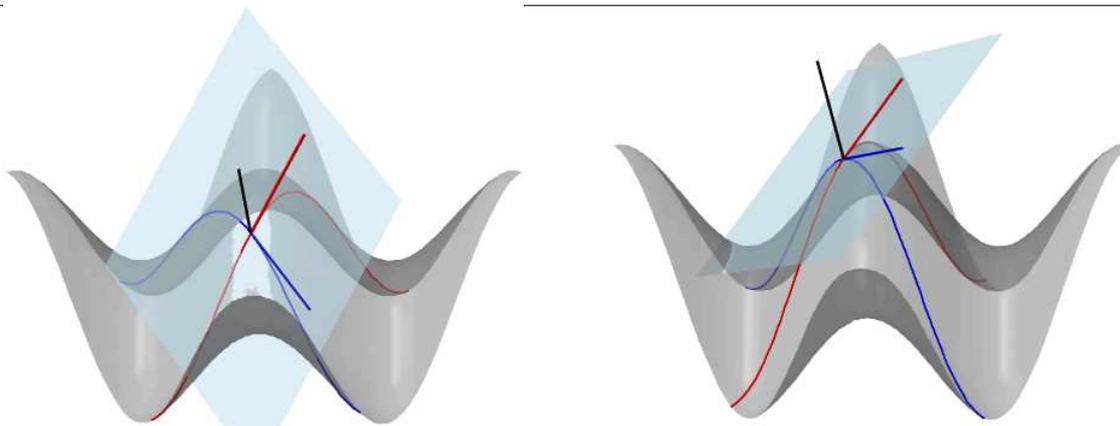
Soit  $(x_0, y_0) \in U$ , et  $M_0$  le point de  $(\Sigma)$  défini par  $(x_0, y_0)$ ;  $M_0$  est régulier si  $g$  admet des dérivées partielles en  $(x_0, y_0)$ , et alors le plan tangent à  $(\Sigma)$  en  $M_0$  a pour équation cartésienne :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = z - g(x_0, y_0)$$

#### Exemple 3

On considère la *boîte à œufs*, définie par l'équation cartésienne  $z = g(x, y) = \cos x \cos y$ .

$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\sin x_0 \cos y_0$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\cos x_0 \sin y_0$ , donc le plan tangent en  $M_0 : (x_0, y_0)$  a pour équation cartésienne :  $-\sin x_0 \cos y_0(x - x_0) - \cos x_0 \sin y_0(y - y_0) = z - \cos x_0 \cos y_0$



deux plans tangents à la boîte à œufs, vecteurs tangents et normaux

**Définition : Équation cartésienne implicite**

Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , alors l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y, z)$  tels que  $\varphi(x, y, z) = 0$  constitue la **surface définie par l'équation cartésienne implicite**  $\varphi(x, y, z) = 0$ .

#### Propriété 5 : équation du plan tangent (cas implicite)

On considère la surface  $(\Sigma)$  d'équation cartésienne  $\varphi(x, y, z) = 0$ , et  $M_0 : (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $(\Sigma)$ .  $M_0$  est un point régulier de  $(\Sigma)$  si  $\text{grad}(\varphi)(M_0) \neq \vec{0}$ , et alors  $\vec{N}_0 = \text{grad}(\varphi)(M_0)$  est un vecteur normal à  $(\Sigma)$  en  $M_0$ ; une équation cartésienne du plan tangent à  $(\Sigma)$  en  $M_0$  équivaut à  $\vec{N}_0 \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(M_0) \cdot (z - z_0) = 0$$

#### Quelques exemples (4)

La sphère paramétrée dans l'exemple 2 est définie par l'équation cartésienne  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ .

Pour un point quelconque  $M_0 : (x_0, y_0, z_0)$  de la sphère,  $\text{grad}(\varphi)(M_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \neq \vec{0}$ , donc une équation cartésienne du plan tangent à  $(\Sigma)$  en  $M_0$  est  $2(x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0)) = 0$ , soit  $\mathbf{x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + z_0 \cdot z = 1}$ .

**Remarque :** Par cette méthode, il n'apparaît plus de point singulier sur la sphère.

Soit  $\mathcal{H}$  la surface d'équation cartésienne implicite :

$$-x^2z^3 - \frac{9}{80}y^2z^3 + \frac{1}{64}(4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 4)^3 = 0.$$

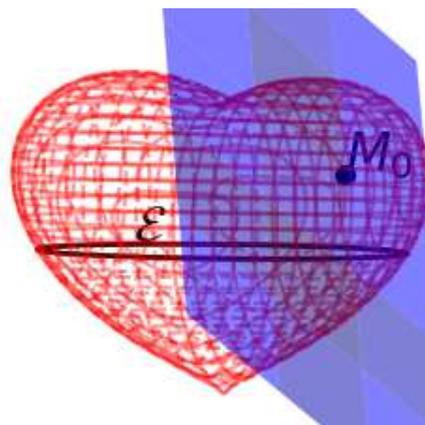
Un calcul laissé au lecteur montre que, pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ , le point  $N(t) : (\cos t, \frac{2}{3} \sin t, 0)$  appartient à  $\mathcal{H}$  : cette ellipse  $\mathcal{E}$  est donc tracée sur  $\mathcal{H}$ , et est [une partie] de la section de  $\mathcal{H}$  par le plan  $z = 0$ .

Or,  $\text{grad}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2xz^3 + \frac{3}{8}(4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 4)^2x \\ \frac{-9}{40}yz^3 + \frac{27}{32}(4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 4)^2y \\ -3x^2z^2 - \frac{27}{80}y^2z^2 + \frac{3}{8}(4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 4)^2z \end{pmatrix}.$

On peut vérifier que  $\text{grad}(\varphi)(N(t)) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  : les points de l'ellipse  $\mathcal{E}$  sont tous singuliers.

Par ailleurs, le point  $M_0 : (0.4, y_1, 0.5)$  appartient à  $\mathcal{H}$  pour une valeur de  $y_1$  proche de  $-0.7161817272 \dots$ . Un calcul numérique aboutit à  $\text{grad}(\varphi)(M_0) \approx (0, 10807503; -0, 7161817272; 0, 106927094)$ , d'où une équation cartésienne (approchée) pour le plan tangent en  $M_0$  :

$$0, 10807503x - 0, 7161817272y + 0, 106927094z = 0, 545715354.$$



**Propriété 6 : tangente à l'intersection de deux surfaces**

On considère deux surfaces  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$ , dont l'intersection est une courbe  $(\gamma)$ . Soit  $M_0$  un point régulier de  $(\Sigma_1)$  et de  $(\Sigma_2)$ ; il existe donc un plan tangent  $\Pi_1$  à  $M_0$  en  $(\Sigma_1)$ , et un plan tangent  $\Pi_2$  à  $M_0$  en  $(\Sigma_2)$ . Si  $\Pi_1 \neq \Pi_2$ , alors  $M_0$  est un point régulier de  $(\gamma)$ , et la tangente à  $(\gamma)$  en  $M_0$  est l'intersection des plans  $(\Pi_1)$  et  $(\Pi_2)$ .

**Exemple 5**

On considère la sphère unité  $(S)$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ , et le cylindre de révolution  $(\Sigma)$  d'équation cartésienne  $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$  :

c'est un cylindre d'axe la droite d'équations  $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

Le cylindre est tangent à la sphère au point  $A : (1, 0, 0)$ . L'intersection du cylindre et de la sphère est une courbe  $\mathcal{V}$  appelée « fenêtre de Viviani »; le

point  $A$  appartient à  $\mathcal{V}$ , ainsi que le point  $B : (\frac{\sqrt{2}+2}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4})$ .

Posons  $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  et  $s(x, y, z) = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4}$ .

Alors  $\text{grad}(s) = 2(x, y, z)$  et  $\text{grad}(\sigma) = (2x - 1, 2y, 0)$ , donc

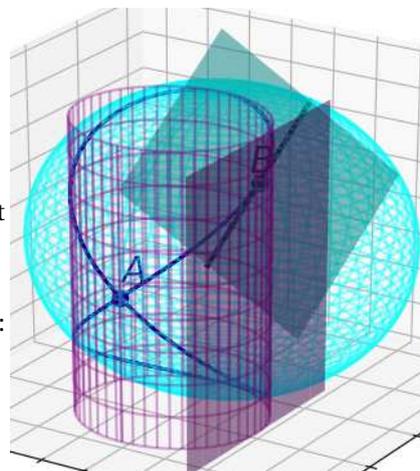
**en A :**  $\text{grad}(s)(A) = (2, 0, 0)$  et  $\text{grad}(\sigma)(A) = (1, 0, 0)$ .

Les plans  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  tangents en  $A$  à  $(S)$  et  $(\Sigma)$  sont confondus :  $A$  est un point singulier de  $\mathcal{V}$  (en fait, il s'agit d'un point double).

**en B :**

$$\vec{n}_1 = \text{grad}(s)(B) : \left( \frac{\sqrt{2}+2}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2-\sqrt{2}} \right) \text{ et } \vec{n}_2 = \text{grad}(\sigma)(B) : \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

La tangente en  $B$  à  $\mathcal{V}$  est dirigée par  $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 : \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .



## 4 Exemples de surfaces usuelles

### 4.1 Surfaces réglées

*Définition : surface réglée*

On appelle **surface réglée** une surface engendrée par une famille de droites, appelées **génératrices**, ce qui signifie qu'un paramétrage de la surface est sous la forme  $(u, v) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \vec{OM}(u) + v \vec{V}(u)$  : la surface est alors engendrée par les génératrices  $\mathcal{D}(u) : (M(u); \vec{V}(u))$ , lorsque  $u$  décrit l'intervalle  $I$ .

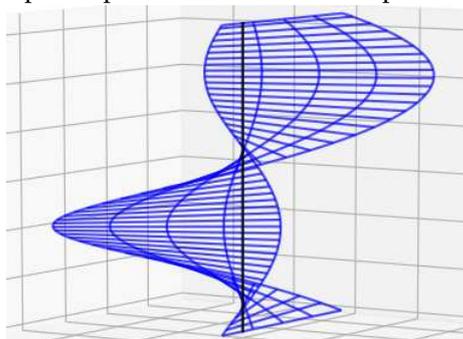
#### Exemple 6

Les plans, les cylindres et les cônes sont « naturellement » réglés, et immédiatement reconnus comme tels :

- \* un **cylindre** est engendré par des génératrices toutes parallèles;
- \* un **cône** est engendré par des génératrices toutes concourantes.

#### Exemple 7

Il existe d'autres surfaces réglées, bien qu'elles ne le paraissent pas au premier abord. Par exemple :



La **rampe hélicoïdale**, paramétrée par  $x = -(1 + v) \sin(u), y = (1 + v) \cos(u), z = u$ , est recouverte par les droites  $\mathcal{D}_u$  passant par  $P(u) : (-\sin u, \cos u, u)$  et dirigées par  $\vec{V}(u) : (-\sin u, \cos u, 0)$ . Elle est donc réglée.

Considérons l'hyperboloïde  $\mathcal{H}_1$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , et la droite  $\mathcal{D}_u$  passant par  $P(u) : (\cos u, \sin u, 0)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{V}(u) : (-\sin u, \cos u, 1)$ .

$\mathcal{D}_u$  admet pour paramétrage

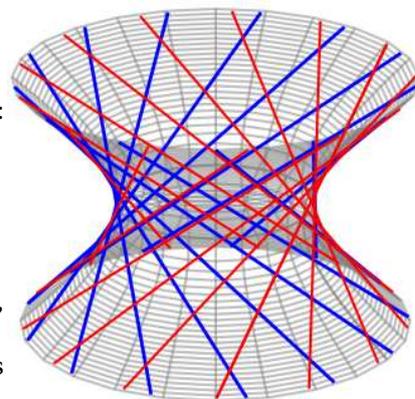
$$x = \cos(u) - v \sin(u), y = \sin(u) + v \cos(u), z = v.$$

Alors

$$x^2 + y^2 - z^2 = \cos^2(u) - 2v \cos(u) \sin(u) + v^2 \sin^2(u) + \sin^2(u) - 2v \cos(u) \sin(u) + v^2 \cos^2(u) - v^2 = 1,$$

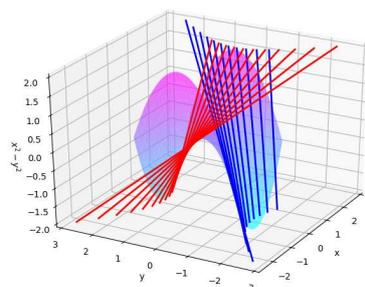
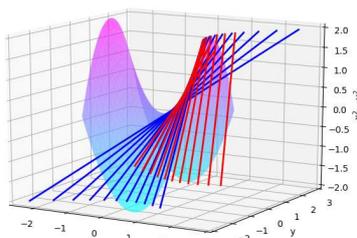
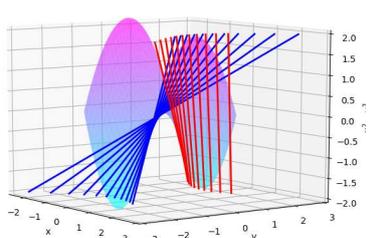
donc  $\mathcal{D}_u \subset \mathcal{H}_1$ .

Réciproquement, on vérifie que tout point de  $\mathcal{H}_1$  appartient à une des droites  $\mathcal{D}_u$ .  **$\mathcal{H}_1$  est donc une surface réglée.** à gauche :  $\mathcal{H}_1$  et ses génératrices



Considérons le parabolôïde hyperbolique ( $PH$ ) d'équation cartésienne  $z = x^2 - y^2$ .

La section de ( $PH$ ) par le plan d'équation  $x - y = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ) est défini par deux équations  $x - y = \alpha$  et  $(x + y)(x - y) = z$ , soit  $x + y = \frac{1}{\alpha} z$  qui est également une équation de plan. Cette section est donc une droite  $\mathcal{D}_\alpha$ , entièrement incluse dans ( $PH$ ). Réciproquement, tout point de ( $PH$ ) appartient à une des droites  $\mathcal{D}_\alpha$ . **( $PH$ ) est donc une surface réglée.**



le  $PH$  et ses génératrices

Ces trois surfaces (rampe,  $\mathcal{H}_1$  et ( $PH$ )) sont souvent utilisées en architecture, car leur caractère réglé facilite la construction et assure une plus grande résistance mécanique à certaines contraintes.

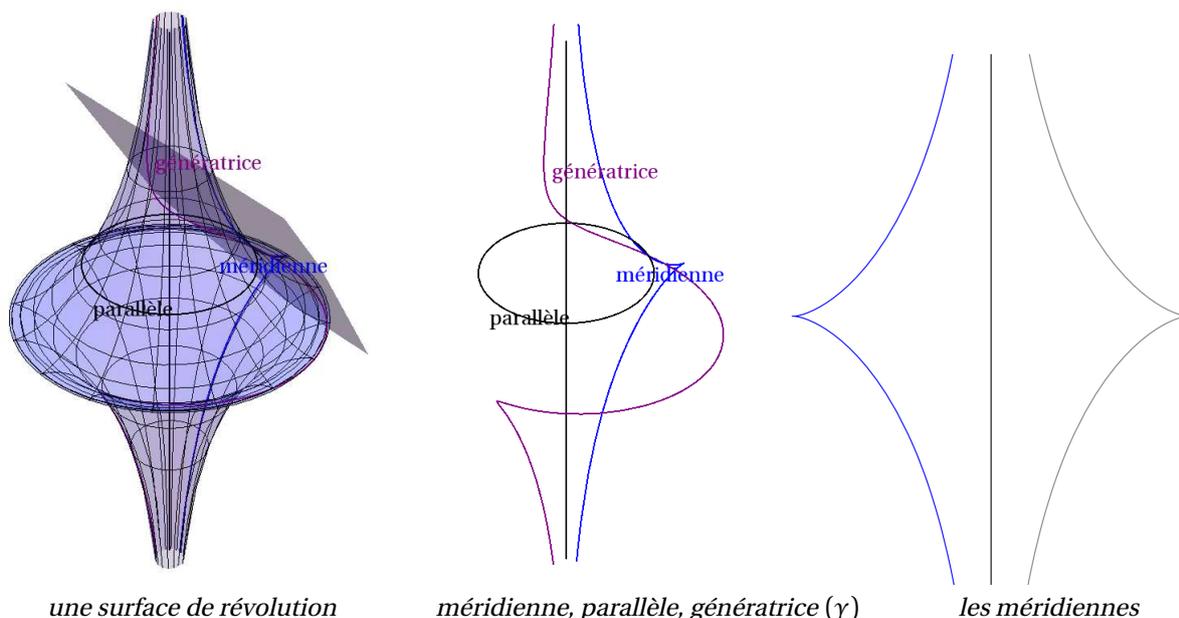
### 4.2 Surfaces de révolution

#### Définition : surface de révolution

Soit  $\Delta$  une droite de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , et  $(\gamma)$  une courbe spatiale.  
 L'image de  $(\gamma)$  par une rotation d'axe  $(\Delta)$  et d'angle  $\theta$  est une courbe  $(\gamma_\theta)$ ; la réunion des courbes  $(\gamma_\theta)$  lorsque  $\theta$  décrit  $[0, 2\pi]$ , forme une surface  $(\Sigma)$  appelée **surface de révolution d'axe  $\Delta$  engendrée par  $(\gamma)$** .

#### Définition : éléments d'une surface de révolution

L'intersection de  $(\Sigma)$  avec un plan *orthogonal* à  $\Delta$  forme un cercle appelé **parallèle** de  $(\Sigma)$ .  
 L'intersection de  $(\Sigma)$  avec un plan *contenant*  $\Delta$  forme deux courbes symétriques par rapport à  $(\Delta)$ , dont chacune est qualifiée de **méridienne** de  $(\Sigma)$ .  
 Tout point de  $(\Sigma)$  qui n'appartient pas à  $\Delta$  est à l'intersection d'un unique méridien et d'une unique parallèle.



une surface de révolution

méridienne, parallèle, génératrice  $(\gamma)$

les méridiennes

**Remarque :** Il est préférable, pour diverses raisons, de choisir un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de manière que  $\Delta$  soit l'axe  $(O, \vec{k})$ .

#### Propriété 7 : paramétrage d'une surface de révolution

Soit  $t \in I \mapsto P(t) = (x_p(t), y_p(t), z_p(t))$  un paramétrage de  $(\gamma)$ , alors la rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $\Delta = (O, \vec{k})$  transforme  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  en  $(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}, \vec{k})$ , donc un paramétrage de  $(\Sigma)$  est

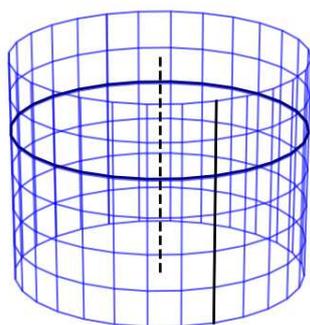
$$\begin{cases} x(t, \theta) = \cos(\theta)x_p(t) - \sin(\theta)y_p(t) \\ y(t, \theta) = \sin(\theta)x_p(t) + \cos(\theta)y_p(t) \\ z(t, \theta) = z_p(t) \end{cases}, \quad (t, \theta) \in I \times [0, 2\pi]$$

#### Propriété 8 : plan tangent à une surface de révolution

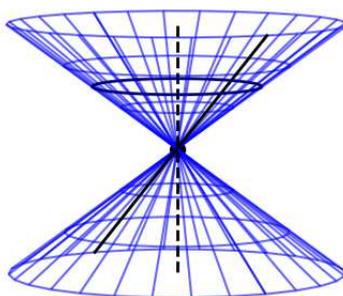
Soit  $M_0$  un point régulier de  $(\gamma)$ , n'appartenant pas à  $\Delta$ . Alors  $M_0$  est un point régulier de  $(\Sigma)$ , la surface de révolution d'axe  $\Delta$  engendrée par  $(\gamma)$ ; le plan tangent à  $(\Sigma)$  en  $M_0$  est tangent à la parallèle et au méridien passant par  $M_0$ .

#### Quelques exemples (8)

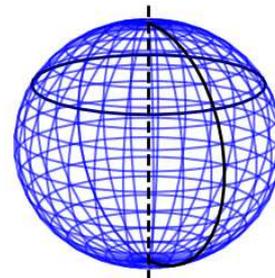
Voici quelques exemples « banals » de surfaces de révolution d'axe  $\Delta = (O, \vec{k})$ .  
 Soit  $D$  une droite parallèle à  $\Delta$ ; la surface obtenue par révolution de  $D$  autour de  $\Delta$  est un **cylindre de révolution**.  
 Soit  $D$  une droite sécante à  $\Delta$ ; la surface obtenue par révolution de  $D$  autour de  $\Delta$  est un **cône de révolution**.  
 Soit  $D$  un cercle de diamètre inclus dans  $\Delta$ ; la surface obtenue par révolution de  $D$  autour de  $\Delta$  est une **sphère**.



cylindre de révolution



cône de révolution

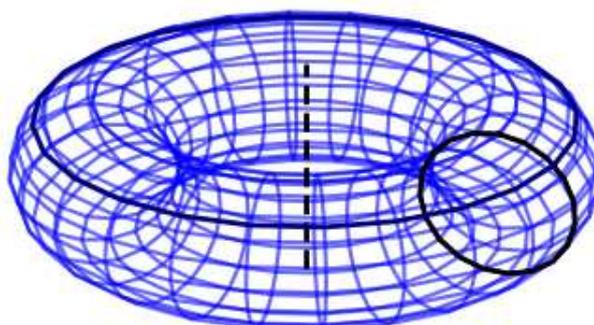


sphère

Exemple 9

Considérons un cercle paramétré par  $x(t) = 5 + 2 \cos t, y(t) = 0, z(t) = 2 \sin t$ . La surface obtenue par révolution de ce cercle autour de l'axe  $(O; \vec{k})$  est un **tore de révolution**, paramétré par  $\begin{cases} x(t, \theta) = (5 + 2 \cos t) \cos \theta \\ y(t, \theta) = (5 + 2 \cos t) \sin \theta \\ z(t, \theta) = 2 \sin t \end{cases}, (t, \theta) \in [0, 2\pi]^2$ .

En formant  $x^2 + y^2 = (5 + 2 \cos t)^2$ , on remarque que  $(\sqrt{x^2 + y^2} - 5)^2 = 4 \cos^2 t$ , donc  $(\sqrt{x^2 + y^2} - 5)^2 + z^2 = 4$ ; par développement,  $x^2 + y^2 - 10\sqrt{x^2 + y^2} + 25 + z^2 - 4 = 0$  soit  $x^2 + y^2 + z^2 + 21 = 10\sqrt{x^2 + y^2}$ . Une équation cartésienne du tore est donc  $(x^2 + y^2 + z^2 + 21)^2 = 100(x^2 + y^2)$ .



Exemple 10

Soit la droite  $D$ , passant par le point  $A : (1, 0, 0)$  et dirigée par  $\vec{u} : (0, 1, 1)$  :  $(D)$  est paramétrée par  $(x, y, z) = (1, t, t), t \in \mathbb{R}$ . La surface obtenue par révolution de  $(D)$  autour de l'axe  $(O; \vec{k})$  est paramétrée par  $x = \cos \theta + t \sin \theta, y = \sin \theta - t \cos \theta, z = t$ . On reconnaît le  $\mathcal{H}_1$  (cf. exemple 7), d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ .

