1 Intersection de deux surfaces, plan tangent

On considère la courbe $\mathscr{D}$ paramétrée par : $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{-\cos(2t)} \\ z = \sin t \end{cases}$, $t \in \left]\dfrac{-3\pi}{4}, \dfrac{-\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

et les deux surfaces $\mathscr{C}$, d'équation cartésienne $x^2+z^2=1$, et (Σ), d'équation cartésienne $x^2+y^2-z^2=0$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est tracée sur $\mathscr{C}$ et (Σ).

   Soit le point $M_1 : \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de $\mathscr{D}$, défini par $t = \dfrac{\pi}{3}$.
2. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{D}$ en M_1.
3. Déterminer un vecteur normal et une équation cartésienne du plan tangent en M_1 à $\mathscr{C}$ et (Σ).
   Retrouver le résultat de la question précédente.

1. Avec $x=\cos t, y=\sqrt{-\cos(2t)}, z=\sin t$ et bien sûr $\cos(2t)\leqslant 0$, $x^2+z^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ et $x^2+y^2-z^2=\cos^2 t-\cos(2t)-\sin^2 t=0$. Donc $M_1(t)\in\mathscr{C}\cap(\Sigma)$, et **$\mathscr{D}$ est tracée sur $\mathscr{C}$ et (Σ).**
2. La tangente à $\mathscr{D}$ en M_1 est dirigée par $\vec{M}\,'_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \frac{\sin(2t)}{\sqrt{-\cos(2t)}} \\ \cos t \end{pmatrix}$ avec $t=\dfrac{\pi}{6}$, soit $\boldsymbol{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}}$.
3. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $c(x)=x^2+z^2-1$ et $\sigma(x)=x^2+y^2-z^2$; alors $\nabla c(x,y,z)=(2x,0,2z)$ et $\nabla\sigma=(2x,2y,2z)$, donc un vecteur normal en M_1 à $\mathscr{C}$ est $\vec{n}_c=\nabla c(M_1)=2\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=(1,0,\sqrt{3})$

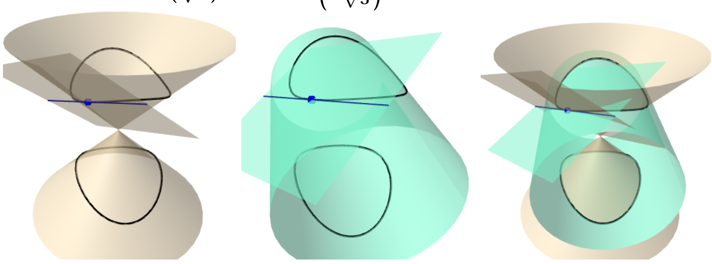
   (il est non nul, donc M_1 est un point régulier *de $\mathscr{C}$).*

   Une équation cartésienne du plan tangent en M_1 à $\mathscr{C}$ est $\vec{n}_c.\overrightarrow{M_1X}=0$, soit $\boldsymbol{x+\sqrt{3}z=\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2.}$

   un vecteur normal en M_1 à (Σ) est $\vec{n}_\sigma=\nabla\sigma(M_1)=2\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=(1,\sqrt{2},-\sqrt{3})$

Une équation cartésienne du plan tangent en M_1 à $\mathscr{C}$ est $\vec{n}_\sigma.\overrightarrow{M_1X}=0$: $\boldsymbol{x+\sqrt{2}y-\sqrt{3}z=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0.}$

   Les deux vecteurs normaux que nous avons trouvés, $\vec{n}_c=\begin{pmatrix}1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_\sigma=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, sont non colinéaires et tous deux orthogonaux au vecteur $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\\sqrt{6}\\1\end{pmatrix}$.



$(\mathscr{C})$ (Σ) $(\mathscr{C}\cap\Sigma)$

2 Une surface réglée

On considère $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, l'hélice droite $\mathscr{H}$ paramétrée par $H(t) : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = b\,t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Soit $\mathscr{T}$ la surface engendrée par les tangentes à $\mathscr{H}$.

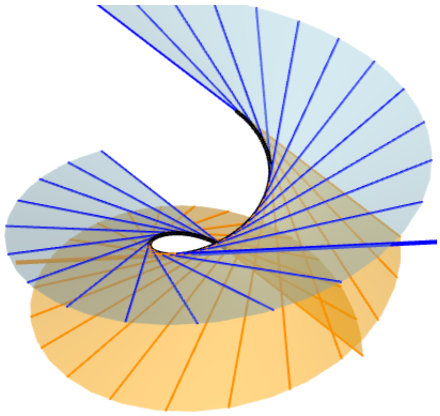
1. Déterminer un paramétrage de $\mathscr{T}$: $(t,u)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \overrightarrow{OM}(t,u)$.
   $\mathscr{T}$ est-elle réglée ?
2. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{T}$, et une équation du plan tangent $\Pi_{t,u}$ en un point régulier $M(t,u)$ de $\mathscr{T}$.
3. Montrer que le plan tangent de $\Pi_{t,u}$ est le même le long de chaque droite génératrice de $\mathscr{T}$.

1. $\vec{P}'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, donc la tangente à $\mathscr{H}$ en $P(t)$ est paramétrée par $u \mapsto \overrightarrow{OM}(t,u) = \overrightarrow{OP}(t) + u\vec{P}'(t)$, soit
$\begin{cases} \boldsymbol{x = a(\cos t - u\sin t)} \\ \boldsymbol{y = a(\cos t + u\cos t)} \\ \boldsymbol{z = b(t+u)} \end{cases}$ **.** Si on fait varier (t,u) dans $\mathbb{R}^2$, ceci constitue un paramétrage de $\mathscr{T}$.

2. Puisque $\overrightarrow{OM}(t,u) = \overrightarrow{OP}(t) + u\vec{P}'(t)$, $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \vec{P}'(t) + u\vec{P}''(t)$ et $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \vec{P}'(t)$, donc
$\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial t} \wedge \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} = u\vec{P}''(t) \wedge \vec{P}'(t)$; un petit calcul vectoriel donne alors $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial t} \wedge \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} = au\begin{pmatrix} b\sin t \\ -b\cos t \\ a \end{pmatrix}$, vecteur clairement non nul si $u \neq 0$. Alors **$M(t,u)$ est régulier si, seulement si, $u \neq 0$.**

3. **$M(t,u)$ est régulier si, et seulement si, $u \neq 0$**, et **un vecteur normal en $M(t,u)$ est $\vec{n}(t,u) = \begin{pmatrix} b\sin t \\ -b\cos t \\ a \end{pmatrix}$**.
une équation du plan $\Pi_{t,u}$ tangent à $\mathscr{T}$ en $M(t,u)$ est donc
$\boldsymbol{b\sin t x - b\cos t y + a z = ab\sin t(\cos t - u\sin t) - ab(\cos t + u\cos t) + a\,b(t+u) = abt}$.

L'équation $b\sin t x - b\cos t y + a z = abt$ ne dépend pas de la variable u ; il en résulte que pour deux valeurs distinctes (u_1, u_2) de u, $\Pi_{t,u_1} = \Pi_{t,u_2}$.
À droite, la surface $\mathscr{T}$.



3 Une surface de révolution

On considère la courbe $\mathscr{H}$ du plan O_{xz} paramétrée par $\begin{cases} x = (1-\sin t)\cos t \\ z = (1-\sin t)\sin t \end{cases}$,
et la surface $\mathscr{P}$ engendrée par révolution de $\mathscr{H}$ autour de O_z.

1. Étudier et tracer la courbe $\mathscr{H}$.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ est $(x^2+z^2) - (x^2+z^2)(x^2+z^2+2z) - z^2 = 0$.
3. Déterminer un paramétrage de $\mathscr{P}$, puis une équation cartésienne de $\mathscr{P}$. Penser aux coordonnées cylindriques.
4. Déterminer la section de $\mathscr{P}$ avec le plan d'équation $z = h$ (distinguer suivant la valeur de h).

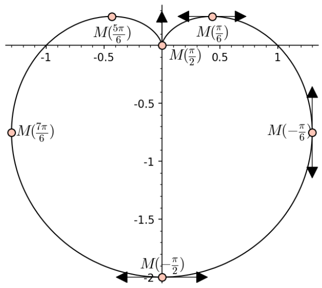
1. $H(t+2\pi) = H(t)$ donc $\mathscr{H}$ est fermée et entièrement décrite lorsque t décrit $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$;
$H(\pi - t) = (-x(t), y(t))$, donc il suffit d'étudier $\mathscr{H}$ sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis de compléter le tracé par symétrie par rapport à l'axe O_y.
Avec $H(t) = \begin{pmatrix} (1-\sin t)\cos t \\ (1-\sin t)\sin t \end{pmatrix}$, $\vec{H}'(t) = \begin{pmatrix} 2\sin^2 t - \sin t - 1 \\ \cos t(1-2\sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\sin(t)+1)(\sin(t)-1) \\ \cos(t)(1-2\sin(t)) \end{pmatrix}$.

D'où le tableau de variations sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

t	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0
$y(t)$	-2	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

2.

Ce tableau indique un point singulier $(0,0)$ en $t = \dfrac{\pi}{2}$,
un point à tangente verticale en $t = \dfrac{-\pi}{6}$,
et deux points à tangente horizontale en $t = \dfrac{-\pi}{2}$ et $t = \dfrac{\pi}{6}$.



Avec $x=(1-\sin t)\cos t$ et $z=(1-\sin t)\sin t$, $x^2+z^2=(1-\sin t)^2$ donc $x^2+z^2+2z=(1-\sin t)^2+2(1-\sin t)\sin t=(1-\sin t)\big((1-\sin t)+2\sin t\big)=(1-\sin t)(1+\sin t)=1-\sin^2 t=\cos^2 t$ et donc
$(x^2+z^2)-(x^2+z^2)(x^2+z^2+2z)-z^2=(1-\sin t)^2-(1-\sin t)^2\cos^2 t-(1-\sin t)^2\sin^2 t=1-\sin t)^2-(1-\sin t)^2\big(\cos^2 t+\sin^2 t\big)=0.$

Finalement **une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ est $(x^2+z^2)-(x^2+z^2)(x^2+z^2+2z)-z^2=0$.**

Pour t décrivant $[-\pi,\pi]$, $H(t):\begin{pmatrix}(1-\sin t)\cos t\\0\\(1-\sin t)\sin t\end{pmatrix}$ décrit la méridienne de $\mathscr{P}$.

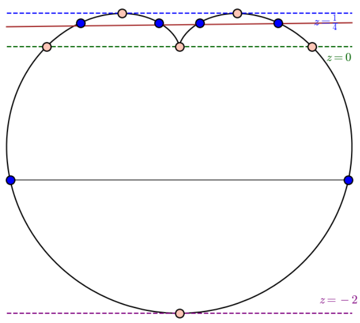
On obtient le point courant $P(t,\theta)$ de $\mathscr{P}$ en appliquant à $H(t)$ une rotation d'axe O_z et d'angle θ, de matrice $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; donc $\boldsymbol{M(t,\theta):R_\theta.H(t)=\begin{pmatrix}(1-\sin t)\cos t\cos\theta\\(1-\sin t)\cos t\sin\theta\\(1-\sin t)\sin t\end{pmatrix}}$.

Ces coordonnées vérifient $r^2=x^2+y^2=(1-\sin t)^2$ et $z=(1-\sin t)\sin t$; un calcul analogue à celui de la question 2. montre que

$$\boldsymbol{(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2+2z)-z^2=0.}$$

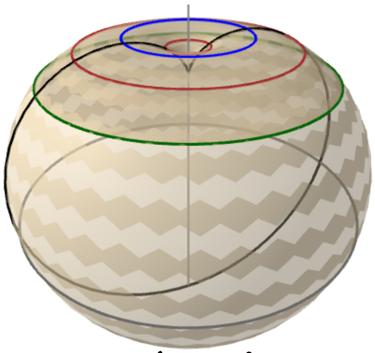
3. Le tracé de la méridienne $\mathscr{H}$ donne le nombre de points d'intersection de $\mathscr{H}$ avec $z=a$:

$$\begin{cases}0 & \text{si } a<-2 \text{ ou } a>\dfrac14\\ 1 & \text{si } a=-2\\ 2 & \text{si } a=\dfrac14\\ 2 & \text{si } -2<a<0\\ 3 & \text{si } a=0\\ 4 & \text{si } 0<a<\dfrac14\end{cases}$$



On en déduit la nature de l'intersection de $\mathscr{P}$ avec $z=a$:

$$\begin{cases}\varnothing & \text{si } a<-2 \text{ ou } a>\dfrac14\\ \text{un point} & \text{si } a=-2\\ \text{un cercle} & \text{si } a=\dfrac14\\ \text{un cercle} & \text{si } -2<a<0\\ \text{point + cercle} & \text{si } a=0\\ \text{deux cercles} & \text{si } 0<a<\dfrac14\end{cases}$$



4 Une surface définie par une équation cartésienne

On considère la surface $\mathscr{S}$ définie par l'équation cartésienne

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=1.$$

(a) Vérifier que le point $A:\left(\dfrac32,\dfrac32,1\right)$ appartient à $\mathscr{S}$,

(b) est un point régulier de $\mathscr{S}$,

(c) et déterminer l'équation du plan tangent à A en $\mathscr{S}$.

(a) $\left(\dfrac32\right)^3+\left(\dfrac32\right)^3+1-3\dfrac32\dfrac32=2\dfrac{27}{8}-\dfrac{27}{4}=0$ donc **$A\in\mathscr{S}$.**

(b) Posons $g(x,y,z)=x^3+y^3-3xyz-1$, alors $\nabla g=\big(3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy\big)$ donc $\nabla g(A)=\dfrac34(3,3,-5)\neq(0,0,0)$; **A est un point régulier de $\mathscr{S}$**.

(c) Une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en A est alors $\nabla g(A)\cdot\overrightarrow{MA}=0$ soit

$$3x+3y-5z=4.$$