

1 — Dérivées partielles d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

On souhaite étudier la continuité et la caractéristique $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^2$.

On peut remarquer que, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-2xy \leq x^2 + y^2 \leq 2xy$ donc pour $(x, y) \neq (0, 0)$: $\frac{-2xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \leq \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ soit

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}, \text{ et enfin } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq \frac{|x|}{2}.$$

Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, donc f est continue en $(0, 0)$.

De plus f est continue par opérations sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} (2x(x^2 + y^2) - 2x \cdot x^2) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} ((x^2 + y^2) - y \cdot 2y) = \frac{2x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si $(x, y) = (0, 0)$, on détermine les dérivées partielles à l'aide des applications partielles :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0$ donc l'application partielle est constante nulle; elle est dérivable en 0 et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0, y) = 0$ donc l'application partielle est constante nulle; elle est dérivable en 0 et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Alors pour $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{2x^4}{x^4} = 2 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

On montre de même que $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

Conclusion :

- * f est continue sur $\mathbb{R}^2$;
- * f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$;
- * f est $\mathcal{C}^1$ (par opérations) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais pas en $(0, 0)$.

2 — Gradient et laplacien d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

On considère une fonction G de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = G(x^2 + y^2)$. Vérifier que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, chercher ses points critiques et déterminer une condition pour que $\Delta g = 0$.

g est $\mathcal{C}^2$ par opérations, et $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x G'(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y G'(x^2 + y^2)$. **Le gradient de g est $\nabla g = 2G'(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.**

Les points critiques de g sont $(0, 0)$, plus les points des cercles de centre O et de rayon R où R^2 est une racine de G' .

On trouve ensuite : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2G'(x^2 + y^2) + (2x)^2 G''(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2G'(x^2 + y^2) + (2y)^2 G''(x^2 + y^2)$, donc

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4G'(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2)G''(x^2 + y^2)$$

Il en résulte que $\Delta g = 0$ si, et seulement si, G vérifie l'équation différentielle $y' + t y'' = 0$

c'est-à-dire que G' vérifie l'équation $(E_0) : y + t y' = 0$.

On trouve par résolution que $G'(t) = \frac{C_1}{t}$ puis $G(t) = C_1 \ln t + C_2$.

Comme $t \mapsto \ln t$ n'est pas continue en 0, nécessairement $C_1 = 0$ et $(\Delta g = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2) \iff (g \text{ est constante})$.

Cependant $(\Delta g = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \iff (g(t) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2)$.

3 — Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On considère la fonction h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$.

On veut déterminer les extremums de h sur $\mathbb{R}^2$.

h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (en tant que polynôme), et $\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3 + 4y$; $\frac{\partial h}{\partial y} = 4y^3 + 4x$.

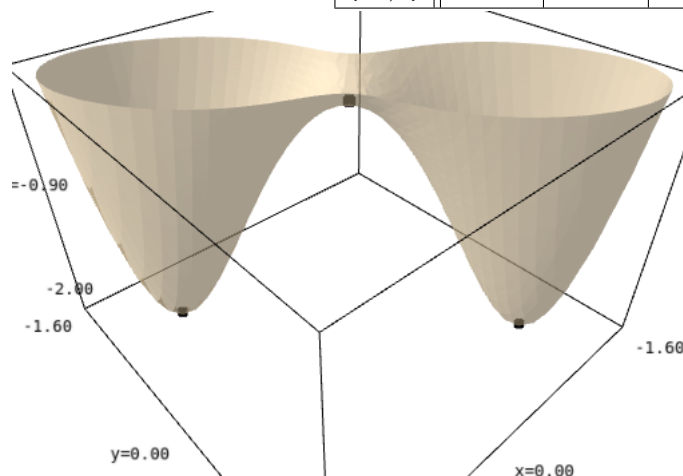
Les points critiques de h vérifient alors le système $\begin{cases} x^3 + y = 0 & (1) \\ y^3 + x = 0 & (2) \end{cases}$, donc $y = -x^3$ puis $x = -y^3 = -(-x^3)^3$, c'est-à-dire $x^9 - x = 0$. Comme $x^9 - x = x(x^4 + 1)(x^4 - 1) = x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$,

les points critiques de f sont $O : (0, 0)$, $A : (1, -1)$ et $A' : (-1, 1)$.

Pour déterminer la nature de ces points critiques, on utilise la matrice hessienne :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}, \text{ et le tableau}$$

(x, y)	$h(x, y)$	$\det(H)$	$\text{Tr}(H)$	$\text{Sp}(H)$	nature
$(0, 0)$	0	-16	0	$\{-4, 4\}$	point-col
$(1, -1)$	-2	128	24	$\{8, 16\}$	minimum
$(-1, 1)$	-2	128	24	$\{8, 16\}$	minimum



4 — Deux équations aux dérivées partielles

Soit

- * le changement de variables $(u, v) = (x + y, xy)$,
- * le domaine $\Delta^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > x\}$,
- * les équations aux dérivées partielles $(E_1) : x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $(E_2) : x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = (y - x)f$.

On cherche à résoudre (E_1) et (E_2) sur Δ^+ .

Rappel : Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tels que $u^2 - 4v > 0$, $\exists! (x, y) \in \Delta^+$ tel que $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v \end{cases} : x = \frac{-u - \sqrt{u^2 - 4v}}{2}, y = \frac{-u + \sqrt{u^2 - 4v}}{2}$.

La formule de la chaîne donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v} = x \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} & (2) \end{cases}$$

Alors : $(2) - (1) : \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (x - y) \frac{\partial f}{\partial v}$ et $x(1) - y(2) : x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = (x - y) \frac{\partial f}{\partial u}$.

Donc $(E_1) : x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ s'écrit $(x - y) \frac{\partial f}{\partial u} = 0$ donc, puisque $y > x : \frac{\partial f}{\partial u} = 0$.

Les fonctions f qui vérifient $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ sont de la forme $f = F_1(v)$, où F_1 est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Les solutions de (E_1) sont de la forme $f(x, y) = F_1(xy)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = (x - y) \frac{\partial f}{\partial v}$ et $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = (x - y) \frac{\partial f}{\partial u}$.

Donc $(E_2) : x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = (y - x)f$ s'écrit $(x - y) \frac{\partial f}{\partial u} = (y - x)f$ donc, puisque $y > x : \frac{\partial f}{\partial u} = -f$.

On rappelle que les solutions de $y' = -y$ sont de la forme $u \mapsto C_2 e^{-u}$; résolvons l'équation $\frac{\partial f}{\partial u} = -f$ par analogie en posant $f = K(u, v) e^{-u}$.

Alors $\frac{\partial f}{\partial u} + f = \frac{\partial K}{\partial u} e^{-u} - K e^{-u} + K e^{-u} = \frac{\partial K}{\partial u}$, qui est nul si, et seulement si, $K = F_2(v)$ où F_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $f = F_2(v) e^{-u}$. **Les solutions de (E_2) sont de la forme $f(x, y) = F_2(xy) e^{-x-y}$.**