CHAPITRE 13 CALCUL DIFFÉRENTIEL 2024/2025

On considère dans ce chapitre un entier $p \in \mathbb{N}^*$ (en pratique, $p = 2$ ou $p = 3$), et une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^p$ est supposé muni d'une norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$

1 — Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Définition : norme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on appelle ***norme*** sur E une application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :
- (i) ***séparation*** $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.
- (ii) ***homogénéité*** $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- (iii) ***inégalité triangulaire*** $\forall (x,y) \in E^2, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

☞ ***Remarque :*** une conséquence de l'inégalité triangulaire est que $\forall (x,y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$.

Définition : Norme euclidienne

La norme euclidienne est définie dans $\mathbb{R}^2$ par $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, et dans $\mathbb{R}^3$ par $\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

☞ D'après le chapitre 3 (espaces euclidiens), la norme euclidienne …est une norme.

Définition : distance

On appelle ***distance*** entre les vecteurs x et y le réel $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|$.

Les propriétés de la norme euclidienne amènent alors

- $\mathrm{d}(x,y) \geqslant 0$, et $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$, et
  $\mathrm{d}(x,z) = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z) \Longleftrightarrow$ ($x-y$ et $y-z$ sont colinéaires) $\Longleftrightarrow (x,y,z)$ sont alignés.

Définition : boules ouvertes/boules fermées

Soit $x_0 \in E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$;
on appelle
- ***boule ouverte*** de centre x_0 et de rayon ε : $\mathcal{B}(x_0,\varepsilon) = \{x \in E, \|x - x_0\| < \varepsilon\}$;
- ***boule fermée*** de centre x_0 et de rayon ε : $\overline{\mathcal{B}}(x_0,\varepsilon) = \{x \in E, \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon\}$;

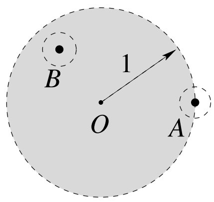
☞ $\mathcal{B}(x_0,\varepsilon) \subset \overline{\mathcal{B}}(x_0,\varepsilon)$; la différence $\overline{\mathcal{B}}(x_0,\varepsilon) \smallsetminus \mathcal{B}(x_0,\varepsilon)$ est appelée ***sphère*** de centre x_0 et de rayon ε (ou cercle si $n = 2$).

Définition : parties bornées

Une ***partie*** A d'un espace vectoriel E est dite ***bornée*** dans $(E, \|\cdot\|)$ s'il existe un réel positif M tel que
$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leqslant M.$$

Définition : point intérieur à une partie de E

Soit A une partie de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, et $x_0 \in A$, on dit que x_0 est ***intérieur*** à A lorsqu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $B(x_0,\varepsilon) \subset A$.



Bien sûr, tout élément intérieur à A appartient à A, et la réciproque est fausse.
Ainsi $A : (0,1)$ n'est pas intérieur à la boule fermée de centre O et de rayon 1, mais $B : (0.3, -0.3)$ l'est.

Définition : intérieur d'une partie de E

Soit A une partie de E. ***L'intérieur de*** A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des éléments $x \in E$ intérieurs à A.
$$\mathring{A} = \{x \in A, \quad \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{B}(x,\varepsilon) \subset A\}$$

Définition : parties ouvertes

On dit qu'une ***partie*** A de E est ***ouverte*** lorsque tout élément de A est intérieur à A.
$$\forall x_0 \in A, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathcal{B}(x_0,\varepsilon) \subset A$$
Cela revient à dire que A est égal à son intérieur : A est un ouvert $\Longleftrightarrow A = \mathring{A}$

Quelques exemples (1)

- ➤ $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes de E : $\mathring{\emptyset} = \emptyset$ et $\mathring{E} = E$.
- ➤ Toute boule ouverte est ouverte : $\overset{\circ}{\widehat{B_0(a,\varepsilon)}} = B_0(a,\varepsilon)$.

- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x>1 \text{ et } -1<y<1\}$ est ouvert.

Définition : points adhérents

Soit A une partie de E, et $a\in E$. a est dit ***adhérent*** à A si et seulement si , pour tout réel $r>0$, $B(a,r)\cap A\neq\emptyset$.

Propriété caractéristique 1

a est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite (u_n) d'éléments de A tels que $\lim u_n = a$.

⚠ La notion de limite d'une suite d'éléments de E est définie dans la deuxième partie du chapitre.

Quelques exemples (2)

- -1 et 1 sont adhérents à $A=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N}^*\right\}$.
- Tous les complexes de module inférieur ou égal à 1 sont adhérents à $\mathscr{U}=\{z\in\mathbb{C},|z|<1\}$.

Définition : adhérence

On appelle ***adhérence*** de A, l'ensemble $\operatorname{adh}(A)$ formé par tous les points adhérents à A (bien sûr, $A\subset\operatorname{adh}(A)$).

Définition : parties fermées

On dit qu'une partie A de E est ***fermée*** lorsque $\operatorname{adh}(A)=A$, ce qui signifie que toute suite *convergente* d'éléments de E a sa limite dans A.

Quelques exemples (3)

- $\emptyset$ et E sont fermés dans E.
- Toutes les boules fermées sont des fermés de E. Les singletons $\{a\}$ sont des fermés.
- Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $]-\infty,+\infty[$, $[\alpha,+\infty[$, $]-\infty,\alpha]$ et $[\alpha,\beta]$ sont fermés.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, et que $\mathscr{V}=\{u_n,n\in\mathbb{N}\}$, alors $\operatorname{adh}(\mathscr{V})=\{u_n,n\in\mathbb{N}\}\cup\{\lim(u_n)\}$.

Définition : frontière d'une partie

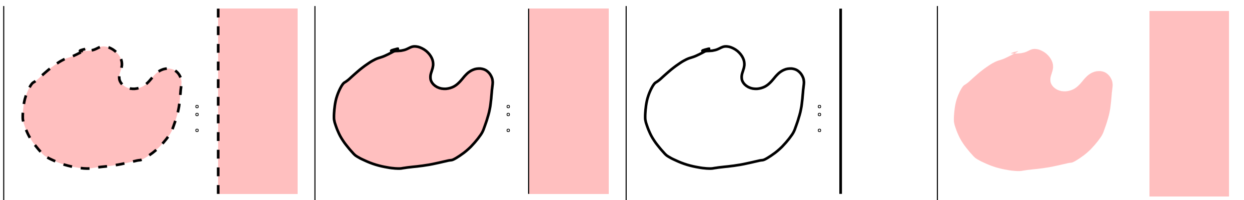
Soit A une partie de E, on appelle ***frontière de*** A l'ensemble

$$\operatorname{Fr}(A)=\operatorname{adh}(A)\smallsetminus\mathring{A}$$

Propriété 1 : caractérisation de la frontière

Les points de la frontière de A sont les points x tels que toute boule ouverte centrée en x rencontre à la fois l'intérieur et l'extérieur de A.

Exemple 4



A | $\operatorname{adh}(A)$ | $\operatorname{Fr}(A)$ | $\mathring{A}$

2 — Fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans E, et $a\in\mathbb{R}$.

Définition : Limite en un point

Soit $\ell\in E$, alors on dit que ***la limite de*** f ***en*** a ***vaut*** ℓ et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si, et seulement si,

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+,\exists\alpha\in\mathbb{R}_+^*,|x-a|<\alpha\Longrightarrow\|f(x)-\ell\|<\varepsilon$$

Définition : Continuité en un point

Soit $a\in\mathbb{R}$, alors on dit que f ***est continue en*** a si, et seulement si,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=f(a)$$

Définition : Continuité globale

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors on dit que f ***est continue sur*** I si, et seulement si, f est continue sur tout élément de I.
Si I est un intervalle non ouvert, par exemple si $I=]a,b]$, on dit que f est continue en I si f est continue en tout point de $]a,b[$ et continue *à gauche* en b.

⚠ On ne parle pas de continuité sur une partie de $\mathbb{R}$ autre qu'un intervalle contenant au moins deux points.

Par exemple, parler de continuité d'une fonction sur $\mathbb{R}^*$ ou sur $\{0\}$ n'a pas de sens.

Propriété 2 : caractérisation par les fonctions coordonnées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle.
On définit les fonctions coordonnées $(f_1, \dots, f_p)$ de $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$.
Alors f est continue en $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, toutes les fonctions $(f_1, \dots, f_p)$ sont continues en a.

Définition : vecteur dérivé d'une fonction vectorielle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle continue en a. Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, alors cette limite est appelée ***vecteur dérivé*** de f en a et notée $f'(a)$.
On définit de même les ***vecteurs dérivés à droite et à gauche*** en a :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{et} \qquad f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Propriété 3 : caractérisation par les fonctions coordonnées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle.
On définit les fonctions coordonnées $(f_1, \dots, f_p)$ de $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$.
Alors f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, toutes les fonctions $(f_1, \dots, f_p)$ sont dérivables en a et

$$f'(a) = \Big(f_1'(a), f_2'(a), \dots, f_p'(a)\Big).$$

Définition : fonction dérivée d'une fonction vectorielle

Pour toute fonction vectorielle, on définit une fonction dérivée en associant à tout point a le vecteur dérivé, lorsque celui-ci existe. En d'autres termes :

$$\text{Si } f = \Big(f_1, f_2, \dots, f_p\Big), \text{ alors } f' = \Big(f_1', f_2', \dots, f_p'\Big) \text{ (existence et valeur)}$$

Propriétés (4) : règles de calcul sur les dérivées

* Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et si f et g sont dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu, g$ est dérivable et $(\lambda f + \mu, g)' = \lambda f' + \mu g'$.
* Si $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ est dérivable, et si f est dérivable sur I, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et $(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$.
* Si f et g sont dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $\langle f | g \rangle$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\big(\langle f | g \rangle\big)' = \langle f' | g \rangle + \langle f | g' \rangle$.
* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sont dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $f \wedge g$ est dérivable sur I et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
* Si f, g, h sont trois fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ dérivables sur I, alors le produit mixte (ou déterminant) $[u, v, w]$ est dérivable sur I, et $[u, v, w]' = [u', v, w] + [u, v', w] + [u, v, w']$

Définition : fonction de classe $\mathscr{C}^k$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$. *Si f' est dérivable*, alors on pose $f'' = (f')'$. De même, on définit les dérivées successives de f en posant $(f^{(k)})' = f^{(k+1)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $f^{(0)} = f$.
On dit que f ***est de classe $\mathscr{C}^k$ sur*** $I \subset \mathbb{R}$ si f est k fois dérivable sur I et que $f^{(k)}$ est continue sur I.

Propriété 5 : linéarité de la dérivation d'ordre n

Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et si f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu, g$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et $(\lambda f + \mu, g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Propriété 6 : formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}$, et u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I \subset \mathbb{R}$. Alors $u\,v$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et

$$(u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Cette formule s'étend au produit scalaire : $$(\langle u | v \rangle)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\langle u^{(k)} \middle| v^{(n-k)} \right\rangle$$

Exemple 5

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = \left(x^3 e^x, \sin x\right) = (f_1(x), f_2(x))$.
f_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$, c'est-à-dire qu'elle est *indéfiniment dérivable* en tant que produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$;
$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{ix})$ est $\mathscr{C}^\infty$ par linéarité.
Alors f est classe $\mathscr{C}^\infty$, et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = \left(f_1^{(n)}, f_2^{(n)}\right)$. De plus :
en posant $u(x) = x^3$ et $v(x) = e^x$, $f_1^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$ or $u^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 3$, donc

$$f_1^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}(x) = x^3 e^x + n.3x^2 e^x + \frac{n(n-1)}{2} 6x e^x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} 6 e^x$$

soit $f_1^{(n)}(x) = \left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right)e^x$,
et en posant $\omega(x) = e^{ix}$, $\omega^{(n)}(x) = i^n e^{ix} = e^{ix + i\frac{n\pi}{2}}$ donc $f_2^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ en passant à la partie imaginaire.
Finalement $f^{(n)}(x) = \left(\left(x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\right)e^x, \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Propriété 7 : Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ définie sur un intervalle I,et de classe $\mathscr{C}^n$ en $a \in I$, alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(a) + o(h^n) \text{ pour } h \text{ assez petit.}$$

☞ La formule de Taylor-Young fournit un développement limité de la fonction f à l'ordre n en a.

Exemple 6

Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = (x - \sin x, 1 - \cos x)$.
En appliquant la formule de Taylor-Young à $\omega : x \mapsto e^{ix}$ à l'ordre 3 en 0 :
$e^{ix} = 1 + ix - \dfrac{x^2}{2} - i\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{4} + o(x^3)$, ce qui donne $\boldsymbol{f(x) = \left(\dfrac{x^3}{6}, \dfrac{x^2}{4}\right) + o(x^3)}$.

Application à la cinématique : Si f est une fonction définie sur I dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), de classe $\mathscr{C}^2$ en a, alors f représente le mouvement d'un mobile $M(t)$ défini par $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)$. Pour des raisons de commodité, on notera $M(t) = f(t)$.

- $M(a)$ représente la position de M à l'instant $t = a$;
- $M'(a)$ représente la *vitesse* de M à l'instant $t = a$;
- $M''(a)$ représente l'*accélération* de M à l'instant $t = a$.

Exemple 7

Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $f(x) = (x - \sin x, 1 - \cos x)$. D'après l'exemple 5 $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{6}, \dfrac{x^2}{4}\right) + o(x^3)$, on trouve par identification $M(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $M'(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $M''(0) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Vocabulaire à connaître :

➤ Norme, distance, norme euclidienne (page 1).
➤ Boule ouverte ou fermée, sphère (page 1).
➤ Partie bornée, ouverte, fermée (pages 1 et 2).
➤ Point intérieur, adhérent (pages 1 et 2).
➤ Adhérence, intérieur, frontière d'une partie (page 2).

3 — Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ ($p = 2$ ou 3)

3.1 – Limites et continuité

Définition : limite d'une fonction en un point adhérent.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^p$, et a un point *adhérent* à $\mathscr{D}$.
On dit que f ***admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite en*** a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x \in \mathscr{D} \text{ et } \|x - a\| < \alpha) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Définition : continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^p$, et a un point *adhérent* à $\mathscr{D}$.
On dit que f ***est continue en*** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition : fonctions partielles en un point

On considère une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^p$, et $a = (a_1, \dots, a_p)$ *appartenant* à $\mathscr{D}$.
On définit p ***fonctions partielles associées à f en*** a : $f_{(a,k)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{k-1}, \boldsymbol{x}, a_{k+1}, \dots, a_p) \end{array}$.

Propriété 8 continuité d'une fonction / de ses fonctions partielles

Si une fonction f est continue en $a \in \mathbb{R}^p$, alors, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, sa fonction partielle $f_{a,k}$ est continue en a_k.
La réciproque est fausse.

Exemple 8

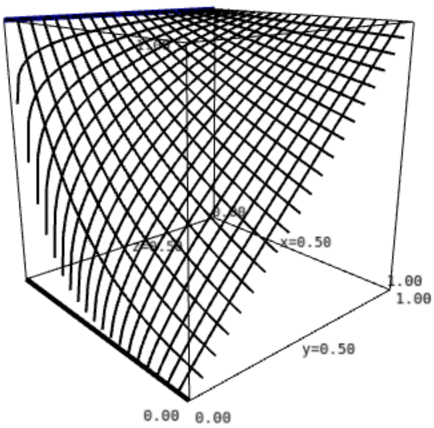
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur $(\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x, y) = y^x$.
Alors $f_{((0,0),1)}$, que l'on notera f_1, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_1(x) = 0^x = 0$; elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 0$.
$f_{((0,0),2)}$, que l'on notera f_2, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_2(y) = y^0 = 1$; elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_2(0) = 1$. **f n'est clairement pas continue en $(0,0)$.**

Exemple 9

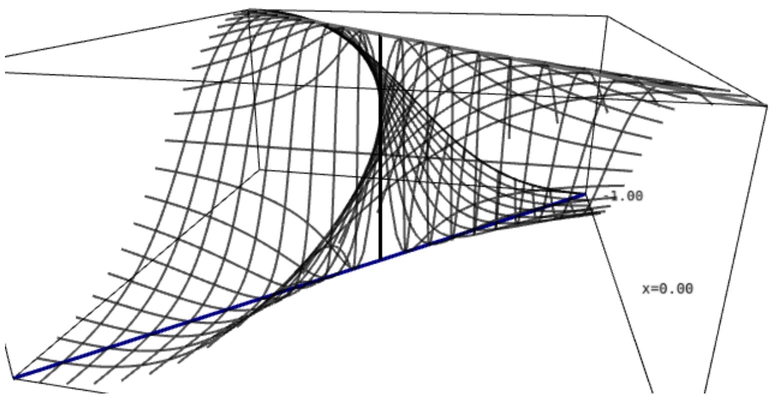
On considère la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0,0)$, et $g(0,0) = 0$.

Avec la notation de l'exemple précédent, $g_1(x) = \dfrac{x.0}{x^2 + 0^2} = 0$ si $x \neq 0$ et $g_1(0) = g(0,0) = 0$; de même $g_2(y) = \dfrac{0.y}{0^2 + y^2} = 0$ si $y \neq 0$ et $g_2(0) = g(0,0) = 0$. Alors **g_1 et g_2 sont continues en 0.**

Cependant, $g(x, x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \dfrac{1}{2}$ si $x \neq 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x, x) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)$, donc **$g$ n'est pas continue en $(0,0)$.**



graphe de f



graphe de g

Définition : continuité d'une fonction sur une partie

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f ***est continue sur une partie*** $\Omega \subset \mathscr{D}$ si, pour tout $a \in \Omega$, f est continue en a.

☞ ***Remarque :*** Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une *nappe* ou *surface* (comme on le verra dans le chapitre suivant), assimilable à un tissu élastique. La non continuité en un point peut s'interpréter comme un trou ou une déchirure dans le tissu.

Propriété 9 : opérations sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. Alors :

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est continue sur Ω.
* $f.g$ est continue sur Ω.
* Si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, alors $\varphi \circ f$ est continue sur Ω. En particulier, si f ne s'annule pas sur Ω, $\dfrac{1}{f}$ est continue sur Ω ; si $f > 0$ sur Ω, $\ln f$ est continue sur Ω.
* Si $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $(f \times g)(\Omega) \subset \mathbb{R}$, alors $(f, g) \mapsto \varphi(f, g)$ est continue sur Ω.

☞ ***Remarque :*** Ce sont ces propriétés qui permettent de justifier *par opérations* la continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$:

Exemple 10

$f : (x, y) \mapsto y^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, puisque $y^x = \mathrm{e}^{x \ln y}$; les applications $x \mapsto x$ et $y \mapsto \ln y$ sont clairement respectivement continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^*$, d'où la continuité de leur produit $x \ln y$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, ainsi que de l'exponentielle de leur produit, car exp est continue sur $\mathbb{R}$.
On laisse au lecteur le détail de la démonstration de la continuité de $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$.

Propriété 10 : une caractérisation des ouverts et des fermés

Soit f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$, alors

* $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \{x \in E, f(x) > 0\}$ est un ouvert ;
* $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, f(x) > 0\}$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in E, f(x) \geqslant 0\}$ sont des fermés.

Théorème 13.1 des bornes atteintes

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.

Exemple 11

Soit $\mathscr{S}$ un solide de l'espace (donc fermé et borné), et J l'application qui à un point M du solide, associe le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $(M; \vec{u})$, où $\vec{u}$ est un vecteur fixé quelconque. J est continue sur $\mathscr{S}$ (par exemple, en utilisant le théorème de Huyghens).
Elle admet donc une valeur minimale, et $\mathscr{S}$ contient un point qui réalise ce minimum. Le centre d'inertie de $\mathscr{S}$ convient.

3.2 – Dérivées partielles

Définition : dérivées partielles

On suppose la fonction f, à valeurs réelles, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, et $a \in U$: $a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_p\right)$.
Pour tout entier $k \in [\![1, p]\!]$, on définit la fonction partielle associée à f et au couple $(a, k) \in U \times [\![1, p]\!]$: $f_{(a,k)}$, par $\forall (a_1, \ldots, a_{k-1}, \boldsymbol{x_k}, a_{k+1}, \ldots, a_p) \in U, \quad f_{(a,k)}(\boldsymbol{x_k}) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, \boldsymbol{x_k}, a_{k+1}, \ldots, a_p)$.
$f_{(a,k)}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un intervalle du type $]a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon[$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $f_{(a,k)}$ est dérivable en a_k, on dit que f ***admet une** $k^{\text{ème}}$ **dérivée partielle [d'ordre 1] en*** a, et on pose :

$$\partial_k f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{(a,k)}(a_k)$$

Exemple 12

On considère $f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^2 \smallsetminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y^x \end{array}$.

Alors, soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $f_{(a,1)}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}, a_2) = a_2^{\boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{x}} \ln(a_2)$ est dérivable en a_1, et sa dérivée en a_1 est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \ln(a_2)\mathrm{e}^{a_1 \ln(a_2)} = \ln(a_2) a_2^{a_1}$. Soit en substituant (x, y) à (a_1, a_2) : $\boxed{\dfrac{\partial y^x}{\partial x}(x, y) = \ln(y) y^x}$ et

$f_{(a,2)}(\boldsymbol{y}) = f(a_1, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{a_1}$ est dérivable en a_2, et sa dérivée en a_2 est $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = a_1 a_2^{a_1 - 1}$: $\boxed{\dfrac{\partial y^x}{\partial y}(x, y) = x y^{x-1}}$.

Que se passe-t-il en $a = (a_1, 0)$, avec $a_1 > 0$?

Dans ce cas, $f_{(a,1)}(x) = f(x, 0) = 0^x = 0$ qui est constant donc dérivable en 0 : $\dfrac{\partial y^x}{\partial x}(x, 0) = 0$.

Exemple 13

On considère $g : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) \neq (0,0) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{array}$.

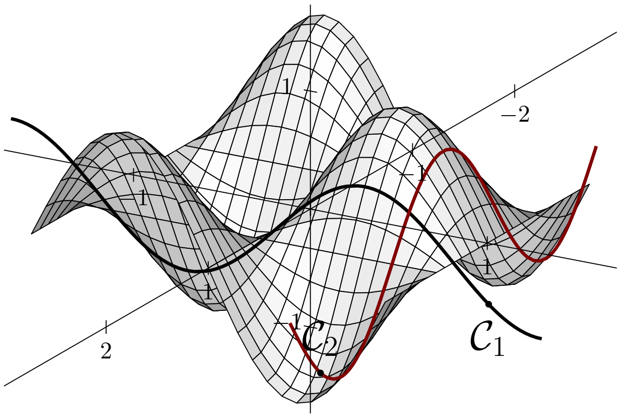
On obtient les dérivées partielles à g en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en considérant une des deux variables (x,y) comme fixée et en dérivant par rapport à l'autre ; ainsi :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy.2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \qquad (\star)$$

Pour obtenir les dérivées partielles en $O = (0,0)$, il faut écrire les fonctions partielles en O :
$f(\cdot,0) : x \mapsto \dfrac{x.0}{x^2} = 0$ et $f(0,\cdot) : y \mapsto \dfrac{0.y}{y^2} = 0$. Ces deux fonctions sont constantes nulles, donc dérivables en 0 et de dérivées nulles : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$, ce qui n'est pas évident en regard de $(\star)$.

3.3 – Illustration graphique

On verra plus tard (chap. 14) qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ peut être représentée sur un ouvert U par une ***surface*** Σ, qui est l'ensemble des points $M : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x,y)$, $(x,y) \in U$.
Alors si $a = (a_1, a_2) \in U$, les fonctions partielles $f_{(a,1)}$ et $f_{(a,2)}$ sont représentées par des *courbes spatiales tracées sur* Σ :
$\mathscr{C}_1 = \{(x, a_2, f(x,a_2)), \quad (x,a_2) \in U\}$ et
$\mathscr{C}_2 = \{(a_1, y, f(a_1,y)), \quad (a_1,y) \in U\}$,
L'existence des dérivées partielles de f en a correspond à celle d'une tangente en a aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.



3.4 – fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition : classe $\mathscr{C}^1$

Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^p$.
On dit que f est ***de classe*** $\mathscr{C}^1$ ***sur*** U si toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U.

Quelques exemples (14)

a) Cas d'un polynôme à plusieurs variables.
On considère un polynôme à plusieurs variables $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, c'est-à-dire une combinaison linéaire de monômes $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p}$.
Chacun de ces monômes admet une dérivée partielle par rapport à chacune des variables x_k, $1 \leqslant k \leqslant p$:
$\partial_k \left(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_p^{n_p} \right) = n_k x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_{k-1}^{n_k} x_k^{n_k-1} x_{k+1}^{n_k} \dots x_p^{n_p}$ qui est continue en tant que monôme en chacun des x_i.
Tout polynôme à plusieurs variables est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

b) Reprenons $f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y^x \end{array}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Si $x > 0$, alors $\lim\limits_{y \to 0_+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$, et $\lim\limits_{y \to 0_+} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en tout point $(x,0)$, $x > 0$. **f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.**

c) Reprenons $g : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) \neq (0,0) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{array}$. Alors g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Cependant, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, donc $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,tx) = \dfrac{t^3(t^2-1)x^3}{(1+t^2)^2\,t^4} = \dfrac{(t^2-1)x^3}{(1+t^2)^2\,t}$ ce qui exclut la possibilité d'une limite de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ en $(0,0)$ et *a fortiori* la continuité de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en $(0,0)$.
De même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$. **g n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.**

Définition : gradient

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ admettant en $a \in \mathbb{R}^p$, p dérivées partielles $\partial_k f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

On appelle alors ***gradient*** de f en a le vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(a) = \nabla f(a) = \big(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_p f(a),\big)$$

Propriété 11 : formule de Taylor à l'ordre 1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ classe $\mathscr{C}^1$ en $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$. Il existe un réel $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tout $(h_1, h_2, \dots, h_p) \in \mathscr{B}(0, \varepsilon)$,

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_p + h_p) = f(a_1, a_2, \dots, a_p) + \sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \varphi(h_1, \dots, h_p)$$

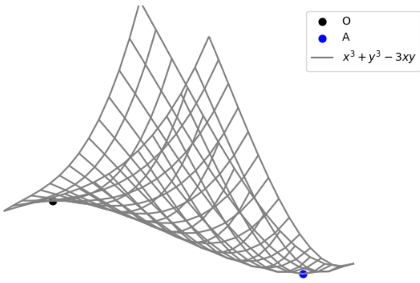
où $\varphi(h_1, \dots, h_p) = o_{(h_1,\dots,h_p)\to(0,\dots,0)}(\|(h_1, \dots, h_p)\|)$, c'est-à-dire

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot \nabla f(a) + o(h)$$

Définition : point critique

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ admettant en tout point de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, p dérivées partielles.
$a \in \Omega$ est ***un point critique*** de f si, et seulement si le gradient de f en a s'annule.

Exemple 15



On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
f admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ deux dérivées partielles
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. *cf.* exemple 13.

Les points critiques de f vérifient le système $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$, soit $\begin{cases} x^4 = x \\ y = x^2 \end{cases}$.

Il y a deux points critiques : $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) = (1,1)$.

3.5 – Règle de la chaîne

Définition : dérivée suivant un vecteur

Soit f une fonction définie sur une partie A de E, a un point intérieur à A et u un vecteur non nul de E.
f ***admet une dérivée en*** a ***suivant le vecteur*** u lorsque $t \mapsto f(a + t\,u)$ est dérivable en 0, c'est-à-dire lorsque $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+t\,u) - f(a)}{t}$ existe ; cette limite est alors appelée dérivée en a suivant u, et notée $\partial_h f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$.

Exemple 16

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si $u = (a,b)$, alors $\dfrac{f(t\,u) - f(0)}{t} = \dfrac{b^2}{a}$ si $a \neq 0$, et $\dfrac{f(t\,u) - f(0)}{t} = 0$ sinon.
f admet donc bien une dérivée suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$.

Propriété 12 : lien avec le gradient

Soit f une fonction définie sur une partie A de E, de classe $\mathscr{C}^1$ en un point a intérieur à A, et u un vecteur de E, alors

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \langle \nabla f(a) | u \rangle \qquad \text{(noté en physique : } \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)_a \cdot \vec{u})$$

Propriété 13 : règle de la chaîne

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U \subset \mathbb{R}^p$, et $\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ p fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans U, alors $\varphi : t \mapsto f\left(x_1(t), \ldots, x_p(t)\right)$ est $\mathscr{C}^1$ dans $\mathbb{R}$, et

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \sum_{k=1}^{p} \partial_k f\left(x_1(t), \ldots, x_p(t)\right) x_k'(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(x_1(t), \ldots, x_p(t)\right) x_k'(t)$$

Interprétation physico-graphique : on considère une courbe dans un espace E à p dimensions, paramétrée par $\gamma : t \mapsto \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t)\right)$, et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$: par exemple, un potentiel scalaire, dont dérive un champ de force $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.
Alors $f \circ \gamma$ est le potentiel le long du chemin, et sa dérivée est $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$; avec les notations de la physique, $(f \circ \gamma)' = \vec{F} \cdot \vec{M}'$.

Exemple 17

On considère le champ électrique induit dans l'espace par une charge ponctuelle q : $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$.
En coordonnées sphériques, $\mathrm{d}M = \mathrm{d}r \vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta u_\theta + r \sin\theta\, \mathrm{d}\phi \vec{u}_\phi$ donc la circulation du champ le long d'une courbe joignant $A = M(a)$ et $B = M(b)$ a pour dérivée

$$C' = \vec{E} \cdot \mathrm{d}M = \frac{qr'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ soit } C(B) - C(A) = \int_A^B \mathrm{d}C = \int_a^b \frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right]_a^b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Exemple 18

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in J$, u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans J, et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \times J$.
On suppose que pour tout $x \in I$, $h(x, .)$ est intégrable sur J, et qu'il existe une fonction ψ intégrable sur J telle que $\forall x \in I, \forall t \in J, |h(x,t)| \leqslant \psi(t)$.
On définit alors la fonction f de $I \times I$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = \displaystyle\int_a^y h(x,t)\mathrm{d}t$.
f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \times J$: pour tous $(x,y) \in I \times J$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_a^y \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ d'après le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.
Alors $\varphi : x \mapsto f(x, u(x)) = \displaystyle\int_a^{u(x)} h(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I$,

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u(x)).1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x)).u'(x) = \int_a^{u(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + u'(x).h(x, u(x)).$$

3.6 – Dérivées partielles d'ordre deux

Définition : dérivées partielles d'ordre deux

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$.
Les p dérivées partielles $\partial_k f = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ sont elles-mêmes des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, qui peuvent admettre des dérivées partielles.
Pour $(i,j) \in [\![1,p]\!]$, on pose (sous réserve d'existence) $\quad \partial_i \partial_j f(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$

et, avec $i = j$: $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$

Définition : fonction de classe $\mathscr{C}^2$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$.
Si toutes les dérivées partielles de f admettent des dérivées partielles en tout point de $\mathscr{U}$, et si ses dérivées secondes dont continues sur $\mathscr{U}$, on dit que f ***est de classe $\mathscr{C}^2$ sur*** $\mathscr{U}$.

Théorème 13.2 de Schwarz

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$:

$$\partial^2_{i,j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \partial^2_{j,i} f$$

Il y a alors trois dérivées partielles d'ordre deux par couple de variables (x,y) :

$$\begin{tikzcd} & & f \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & \frac{\partial f}{\partial x} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \frac{\partial f}{\partial y} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{tikzcd}$$

Exemple 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, et
$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}-\dfrac{2(x^2-y^2)x^2y}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{(x^2-y^2)y}{x^2+y^2}=\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{2(x^2-y^2)xy^2}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{(x^2-y^2)x}{x^2+y^2}=\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$.

On vérifie alors que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)=r\sin\theta\left(\cos^4\theta+4\cos^2\theta\sin^2\theta-\sin^4\theta\right)$, donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$.

De plus $f(x,0)=0$, fonction partielle constante nulle, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

De même $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. f est $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$; elle l'est naturellement sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par opérations.
Par ailleurs, les applications partielles de $\partial_x f$ et $\partial_y f$ en $(0,0)$ sont : $\partial_x f(0,y)=-y$ et $\partial_y f(x,0)=x$.

On en déduit que f admet deux dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$, et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$.

Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ en $(0,0)$.

3.7 – Extremums d'une fonction à deux variables

Définition : maximum/minimum/extremum

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.
$a\in\mathbb{R}^p$ est un ***maximum global*** de f si $\forall x\in\mathbb{R}^p,\quad f(x)\leqslant f(a)$.
$a\in\mathbb{R}^p$ est un ***minimum global*** de f si $\forall x\in\mathbb{R}^p,\quad f(x)\geqslant f(a)$.
$a\in\mathbb{R}^p$ est un ***extremum global*** de f si a est un maximum ou un minimum global de f.
$a\in\mathbb{R}^p$ est un ***maximum local*** de f s'il existe une boule ouverte $B(a,\varepsilon)$, telle que $\forall x\in B(a,\varepsilon), f(x)\leqslant f(a)$.
On définit de manière analogue un minimum ou un extremum local.

☞ ***Remarque :*** En posant $\Delta f=f(x)-f(a)$, a est un extremum de f si et seulement si Δ garde un signe constant au voisinage de a

Propriété 14 : condition nécessaire d'extremum

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'*ouvert* $\mathscr{U}$. Alors tout extremum [local] de f est un point critique de f.

⚠ La réciproque est fausse (voir l'exemple 13 ci-dessous) : certains points critiques ne sont pas des extremums.
En conséquence, il faut chercher les extremums de f dans un domaine D parmi :

- Les points critiques de f (si f est $\mathscr{C}^1$) ;
- les points de la frontière de D (si D n'est pas ouvert) ;
- les points où f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Propriété 15 : formule de Taylor d'ordre 2

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors, pour (h,k) suffisamment petits :

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+o(h^2+k^2)$$

En particulier, si (a,b) est un point critique de f :
$\Delta f=f(a+h,b+k)-f(a,b)=h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+o\left(h^2+k^2\right)$ a le même signe au voisinage de $(0,0)$ que le polynôme du second degré : $h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Définition : matrice hessienne

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. La ***matrice hessienne*** de f en (a,b) est

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de Schwarz, cette matrice est symétrique.

Propriété 16 : nature d'un point critique

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2$, (a,b) un point critique de f, et $H_f(a,b)$ la matrice hessienne de f en (a,b). Alors $H_f(a,b)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, de valeurs propres réelles λ et μ,
donc $\det(H_f(a,b)) = \lambda\mu \neq 0$, et $\operatorname{tr}(H_f(a,b)) = \lambda + \mu$;

nature	signe de λ et μ	$\det(H_f(a,b))$	$\operatorname{tr}(H_f(a,b))$
minimum	$\lambda > 0, \mu > 0$	> 0	> 0
maximum	$\lambda < 0, \mu < 0$	> 0	< 0
point-col	$\lambda > 0 > \mu$	< 0	

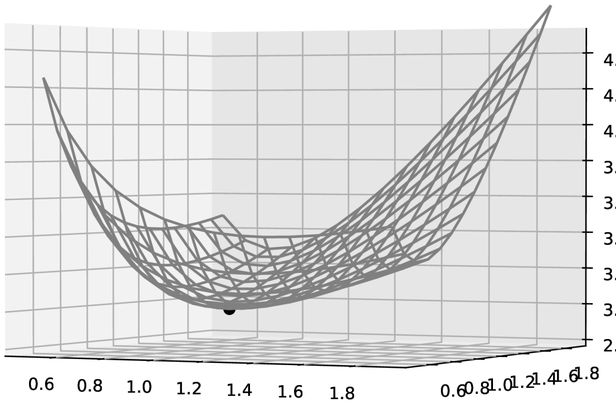
Exemple 20

Soit f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et $\operatorname{grad}(f) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y - \dfrac{1}{x^2}, x - \dfrac{1}{y^2}\right)$.

Les points critiques de f vérifient $x^2 y = 1$ et $y^2 x = 1$: on trouve $\dfrac{y}{x} = 1$ et $xy = 1$, soit $x = y = 1$.

Il n'y a qu'un point critique de f : $(1,1)$. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2}{y^3}$.

La matrice hessienne de f en $(1,1)$ est donc $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
$\det(H) = 3 > 0$ et $\operatorname{tr}(H) = 4 > 0$.
f admet un minimum en $(1,1)$.
Ci-contre :
graphe de la surface $z = f(x,y)$ autour du minimum



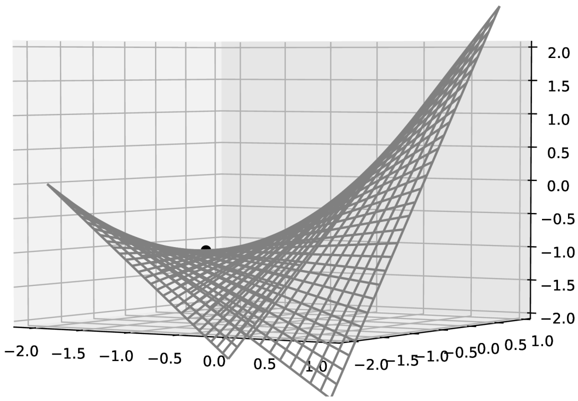
Exemple 21

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy + x + y$.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\vec{\nabla} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (y+1, x+1)$.

f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{C}^2$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

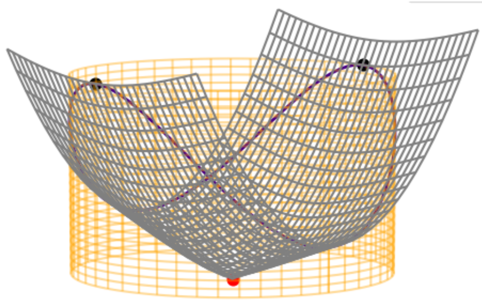
La matrice hessienne de f en $(-1,-1)$ est donc $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
$\det(H) = -1$ et $\operatorname{tr}(H) = 0$.
$(-1,-1)$ n'est ni un maximum ni un minimum : c'est un ***point-col***
Ci-contre : graphe de la surface $z = f(x,y)$ autour du point-col



Exemple 22

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2 + \sqrt{x^2+y^2}$.
On cherche les extremums de f sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 9\}$.

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et
$\vec{\nabla} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2y + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
Il n'y a pas de point critique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais, comme la fonction est continue, il y a forcément un maximum et un minimum sur le fermé borné D, d'après le théorème du maximum.
On constate que $f(0,0) = 0$, alors que $\forall (x,y) \in D, \quad f(x,y) \geqslant 0$, donc f admet un minimum en $(0,0)$.
Le maximum ne peut être atteint que sur le bord de D, c'est-à-dire pour $x^2+y^2 = 9$.
On trouve bien sûr $y = \pm 3, x = 0$.
Ci-contre : graphe de la surface $z = f(x,y)$ sur D



3.8 – Courbes du plan définies par une équation cartésienne

Définition : courbe de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par une équation implicite

On considère un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
Alors, l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) telles que $f(x,y) = \lambda$ est une courbe $\mathscr{C}_\lambda$ (éventuellement vide) appelée ***courbe de niveau*** de f.

Propriété 17 : points réguliers d'une courbe de niveau

Soit $M_0 : (x_0, y_0)$ un point de $\mathscr{C}_\lambda$; M_0 est ***régulier*** lorsque $\vec{\nabla} f(M_0) \neq \vec{0}$.
Dans ce cas, la tangente à $\mathscr{C}_\lambda$ en M_0 a pour équation cartésienne :

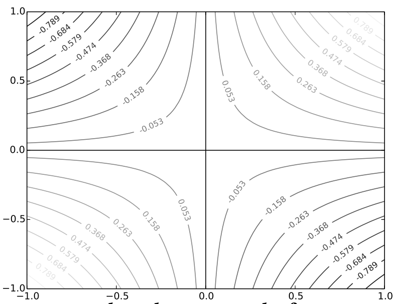
$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Propriété 18 : lignes de niveau et gradient

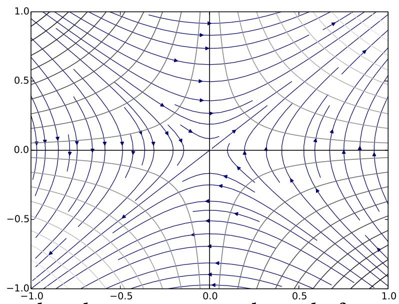
En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Exemple 23

On considère la fonction f_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_1(x,y) = xy$.
Les courbes de niveau sont les axes $x = 0$ et $y = 0$ (si $\lambda = 0$) et les hyperboles d'équation $xy = \lambda$.
$\vec{\nabla} f_1 = (y, x)$. Le seul point singulier des courbes de niveau est $(0,0)$.



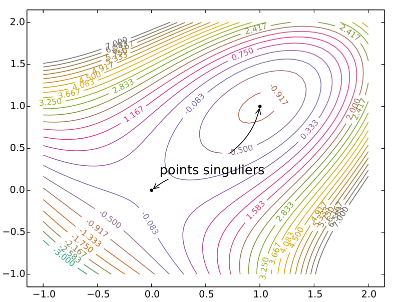
courbes de niveau de f_1

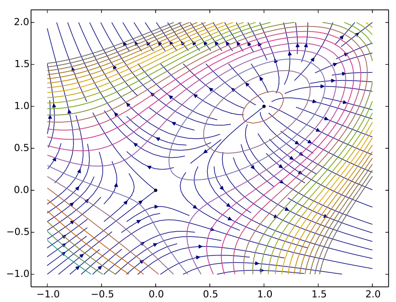


courbes de niveau et gradient de f_1

Exemple 24

On considère la fonction f_2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_2(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
$\vec{\nabla} f_2 = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$. Les points singuliers des courbes de niveau vérifient $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$, soit $(x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}$.





courbes de niveau de f_2 *courbes de niveau et gradient de f_2*

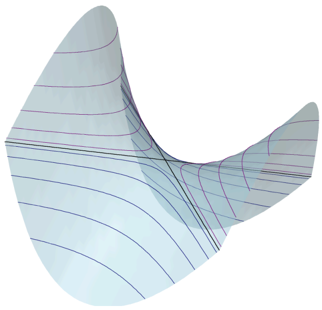


figure 14 : graphe de f_1

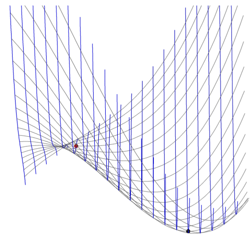


figure 15 : graphe de f_2

4 — Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

On considère dans cette partie deux entiers $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ (en pratique, $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$), et une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ sont supposés munis d'une norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$

Définition : limite d'une fonction en un point adhérent.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^p$, et a un point *adhérent* à $\mathscr{D}$.
On dit que f ***admet*** $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ ***comme limite en*** a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, lorsque

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x \in \mathscr{D} \text{ et } \|x - a\| < \alpha) \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$$

Définition : continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^p$, et a un point *appartenant* à $\mathscr{D}$.
On dit que f ***est continue en*** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition : continuité d'une fonction sur une partie

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^p$. On dit que f ***est continue sur une partie*** $\Omega \subset \mathscr{D}$ si, pour tout $a \in \Omega$, f est continue en a.

Propriété 19 : caractérisation par les fonctions coordonnées.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$; il existe n fonctions f_k de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, définies par $f = (f_1, \dots, f_n)$ et appelées ***fonctions coordonnées***.
f est continue sur $\mathscr{D}$ si, et seulement si, toutes les fonctions coordonnées le sont.

4.2 – Dérivées partielles

Propriété 20 : dérivées partielles et fonctions coordonnées

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, de fonctions coordonnées $(f_1, \dots, f_n)$.
f admet une dérivée partielle par rapport à x_k si, et seulement si, toutes ses fonctions coordonnées admettent une dérivée partielle par rapport à x_k, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)$$

De même, f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à (x_i, x_j) si, et seulement si, toutes ses fonctions coordonnées admettent une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à (x_i, x_j), et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

Propriété 21 : dérivées partielles des composées

Soit x et y deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U \subset \mathbb{R}^2$, et f $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$ tel que $(x(U), y(U)) \subset V$.
Alors, d'après la règle de la chaîne, $\varphi : (u, v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Exemple 25

On considère un réel $c \neq 0$, et les fonctions x et y définies par $x(u,v) = u + v$ et $y(u,v) = \dfrac{u - v}{c}$. Alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} & = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} & = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Exemple 26

Un cas particulier important : le passage en coordonnées polaires.

On considère les fonctions x et y de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

On obtient alors $\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} & = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} & = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$ soit $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = \cos\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} & -\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = \sin\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} & +\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
après résolution d'un système linéaire.

4.3 – Applications à la résolution d'équations aux dérivées partielles

Exemple 27

- (EDP_1) $$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

  En utilisant l'égalité obtenue dans l'exemple 17 avec $c = \dfrac{1}{2}$, on trouve que (EDP_1) équivaut à $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$.
  Cette égalité caractérise les fonctions φ à deux variables qui ne dépendent que de v (elles sont « constantes par rapport à u »). On écrit $\varphi(u,v) = F_1(v)$ où F_1 est une fonction à variable réelle de classe $\mathscr{C}^1$;
  or $x = u+v, y = 2(u-v)$ donc $2x+y = 4u$ et $2x-y = 4v$ soit $v = \dfrac{2x-y}{4}$.
  On aboutit alors à $f(x,y) = \varphi(u,v) = F_1\left(\dfrac{2x-y}{4}\right)$, F_1 étant une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

- (EDP_2) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

  On utilise le changement de variable défini dans l'exemple 17 :
  $\begin{cases} (1) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} & = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ (2) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} & = -\dfrac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^2$, soit $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = \cos\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} - \dfrac{y}{x^2+y^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = \sin\theta\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$
  après résolution du système en $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
  On trouve alors $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = r\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$, ce qui résulte de (1). L'équation (EDP_2) s'écrit alors $r\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = 1$.
  L'équation différentielle $r\,y'(r) = 1$ ayant pour solutions $r \mapsto K + \ln r$, on trouve par analogie les solutions de $r\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = 1$: ce sont les fonctions $\varphi : (r,\theta) \mapsto F_1(\theta) + \ln r$, soit $f : (x,y) \mapsto \phi_1\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.