CHAPITRE 12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 2024/2025

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés « scalaires ».

1 — Équations du premier ordre à coefficients quelconques : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$

a, b, c sont trois fonctions de I dans $\mathbb{K}$ continues sur I.

Propriété 1 : nature de l'ensemble des solutions

Les solutions de $a(t)y' + b(t)y = 0$, sur tout intervalle I où a ne s'annule pas, forment un espace vectoriel de dimension 1, dirigé par $u : t \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{b(\theta)}{a(\theta)} \mathrm{d}\theta\right)$

Remarque : à part la solution identiquement nulle, aucune solution ne s'annule sur les intervalles de résolution; les solutions non nulles conservent un signe constant sur chaque intervalle de résolution. C'est ce qui justifie *a priori* les calculs (division par y, disparition des valeurs absolues, transformation de la constante d'intégration en constante multiplicative de signe quelconque, etc...)

Méthode 1 : de variation de la constante

On considère l'équation $(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$.
La propriété 1 ci-dessus fournit une solution u de l'équation homogène $a(t)y' + b(t)y = 0$.
On trouve alors les solutions de (E) en posant $y(t) = k(t)u(t)$: (E) devient alors $a(t).u(t).k'(t) = c(t)$.
Ceci fournit une expression de k comme une intégrale, et donc une solution particulière y_0 de (E);
L'ensemble des solutions de (E) est alors $\mathscr{S} = \{y_0 + \lambda u, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Théorème 12.1 de Cauchy-Lipschitz

Il existe une unique solution de (E) définie par une condition initiale $y(t_0) = y_0$ où $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, ce qui signifie que les courbes intégrales recouvrent la bande $I \times \mathbb{R}$ sans se couper.

Exemple 1

Cas de l'équation à coefficients constants : $y' - \alpha y = f(t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, f continue sur $I \subset \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation sans second membre associée sont les $t \mapsto C\mathrm{e}^{\alpha t}$, $C \in \mathbb{R}$.
La méthode 1 de variation de la constante amène à poser $y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}u(t)$, l'équation s'écrit alors $\mathrm{e}^{\alpha t}u'(t) = f(t)$.
Alors $y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(C + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\alpha\theta} f(\theta)\mathrm{d}\theta\right)$.

Exemple 2

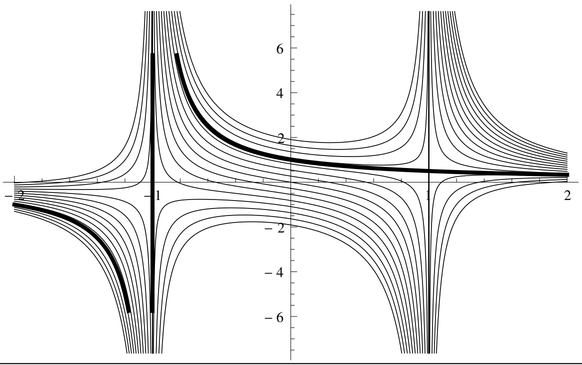
Résolution de $(E_2) : \left(t^2 - 1\right)y'(t) + 2t\, y(t) = 1$

1. **Intervalles de résolution**
   Les fonctions $a : t \mapsto t^2 - 1$, $b : t \mapsto 2t$ et $c : t \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   a ne s'annule pas sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, \infty[$.
   On résout donc l'équation sur un de ces intervalles.
2. **Résolution de l'équation sans second membre** $(E_2)_h : \left(t^2 - 1\right)y' + 2ty = 0$
   $\int \frac{-2t}{t^2 - 1}\mathrm{d}t = -\ln\left|t^2 - 1\right| [+cte]$ donc sur I_k, les solutions de $(E_2)_h$ sont multiples de $u : t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1}$.
3. **Méthode de variation de la constante**
   Les solutions de l'équation complète sur chacun des I_k sont donc $y = k.u$:
   $a(k'u + ku') + b(ku) = (a.u' + b.u)k + a.u.k' = a.u.k'$ donc (E_2) se ramène à $k' = 1$. On peut donc prendre $k(t) = t$.
4. **Conclusion**
   Les solutions de l'équation complète sur chacun des I_k sont $\quad t \mapsto (t + C)\, u(t) = \frac{t}{t^2 - 1} + \frac{C}{t^2 - 1}, \quad C \in \mathbb{R}$
5. **Prolongement en ± 1**
   On constate que $y(t) = \frac{t + C}{t^2 - 1}$ ne peut tendre vers une limite finie en 1 que si $C = -1$, et en ce cas $y(t) = \frac{1}{1 + t}$
   (calcul analogue en $t = -1$.)

Ci-contre, des courbes intégrales de l'équation

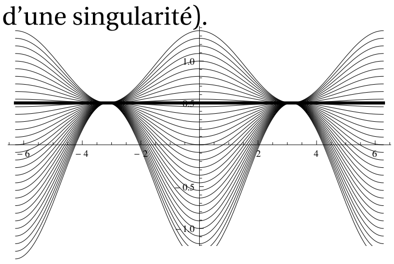
$$(t^2-1)y'+2\,t\,y=1$$

L'ensemble des courbes intégrales recouvre le domaine $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\times\mathbb{R}$, coupé par les asymptotes $y=\pm 1$.
Seule la solution $y\mapsto\dfrac{1}{1+t}$ est prolongeable en $t=1$; aucune solution ne vérifie $y(1)=1$ (par exemple).

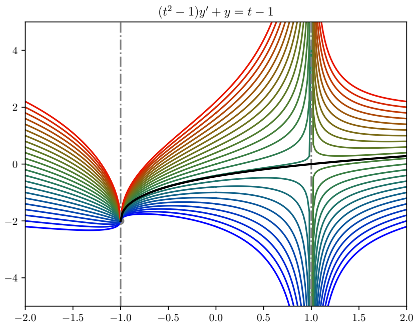


Les valeurs de t pour lesquels a s'annule provoquent des ***singularités***, qui correspondent à des irrégularités des courbes intégrales : asymptotes, nœuds, tangentes verticales, et, dans tous les cas, à des restrictions sur l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy en ces points. Voici quelques exemples (en gras, on a représenté une éventuelle courbe intégrale prolongeable de part et d'autre d'une singularité).

- ⋆ **Équation : $\sin(t)y'+(1-\cos t)y=\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$**
  Solution générale :
  $\dfrac{1}{2}+C_1\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{C_1}{2}(1+\cos t), C_1\in\mathbb{R}$;
  singularités en $t=k\pi$;
  solution prolongeable : $\dfrac{1}{2}$.



- ⋆ **Équation : $(t^2-1)y'+y=t+1$**
  Solution générale :
  $\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}(-\arcsin(t)+C_1)$ sur $]-1,1[$;
  $\sqrt{\dfrac{1+t}{t-1}}\left(\ln(t+\sqrt{t^2-1})+C_2\right)$ sur $]1,+\infty[$;
  $\sqrt{\dfrac{1+t}{t-1}}\left(\ln(-t+\sqrt{t^2-1})+C_3\right)$ sur $]-\infty,-1[$.
  singularités en $t=-1$ et $t=1$;



2 — Équations du second ordre $(E): y''+a(t)y'+b(t)y=f(t)$

2.1 – Généralités

Il existe une méthode générale de résolution seulement lorsque les coefficients a, b et c sont constants; hors de ce cas, les méthodes de résolution basées sur l'équation caractéristique ne conviennent ni à l'équation (E) ni au système (Σ) : voir à ce sujet les exemples 7, 11 et 12, plus bas.

Propriété 2 : solutions de l'équation homogène

Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y''+a(t)y'+b(t)y=0$ forment un espace vectoriel $\mathscr{S}_0$ de dim. 2.
Si on appelle (u,v) une des bases de $\mathscr{S}_0$: $\mathscr{S}_0=\mathrm{Vect}(u,v)=\{\lambda\,u+\mu\,v\}$

Propriété 3 : solutions de l'équation complète

Les solutions de l'équation (E) s'écrivent sous la forme

$$\boxed{y=y_0+\lambda\,u+\mu\,v}$$

où y_0 est une solution ***particulière*** de (E), et où (u,v) sont deux solutions ***linéairement indépendantes*** de l'équation sans second membre $(E_0): y''+a(t)y'+b(t)y=0$.

Exemple 3

On considère $\alpha\in\mathbb{R}^*$, et l'équation différentielle $y''-\alpha^2y=t$.
Une base de solutions de l'équation homogène associée est $u: t\mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$, $v: t\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$.
Une autre base est $\psi=\dfrac{u+v}{2}$, $\omega=\dfrac{u-v}{2}$: $\psi(t)=\mathrm{ch}(\alpha t)$, $\omega(t)=\mathrm{sh}(\alpha t)$.
On remarque que $y_0: t\mapsto\dfrac{-t}{\alpha^2}$ est solution de l'équation complète. L'ensemble des solutions de cette équation est donc : $\mathscr{S}=\{y_0+\lambda u+\mu v,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}=\left\{t\mapsto\dfrac{-t}{\alpha^2}+\lambda\mathrm{e}^{\alpha t}+\mu\mathrm{e}^{-\alpha t},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}=\{y_0+A\psi+B\omega,(A,B)\in\mathbb{R}^2\}$

Théorème 12.2 de Cauchy (cas linéaire)

Pour tout $t_0 \in I$, et pour tout $(v_0, d_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution sur I du problème de Cauchy
$\begin{cases} (E) & y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ (CI) & y(t_0) = v_0 \qquad y'(t_0) = d_0 \end{cases}$

2.2 – Équations du second ordre à coefficients constants

On suppose ici que a, b, c sont des constantes dans $\mathbb{K}$, et que $a \neq 0$.

Méthode 2 : équation du second ordre à coefficients constants

Alors on résout l'équation homogène $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ de la manière suivante :

- ⋆ On forme l'équation caractéristique $(\chi) : ar^2 + b\,r + c = 0$, et on considère ses racines complexes (r_1, r_2).
- ⋆ Si $r_1 \neq r_2$, une base de l'espace des solutions de l'équation (E_0) est $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}\right)$.
- ⋆ Si $r_1 = r_2$, une base de l'espace des solutions de l'équation (E_0) est $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}, t \mapsto t\mathrm{e}^{r_1 t}\right)$.

La résolution de l'équation complète se fait :

- ⋆ si le second membre est polynomial, en cherchant une solution polynomiale ;
- ⋆ si le second membre est de la forme $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{mx}$, avec le changement d'inconnue $y(x) = \mathrm{e}^{mx}z(x)$;

☞ ***Remarque :*** ⚠cette méthode est inapplicable si les coefficients de l'équation ne sont pas constants ...

Exemple 4

...en particulier en examinant les exemples 8 et 9 plus bas, on constate que l'équation $(E_{11}) : y''(t) - (t+1)y'(t) + t\,y(t) = 0$ aboutit à l'équation caractéristique $r^2 - (t+1)r + t = 0$, de solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = t$. $t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t} = \mathrm{e}^t$ est bien solution de (E_{11}), mais pas $t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{t^2}$.

Exemple 5

Résolution de $(E_5) : y'' + y' + y = \mathrm{e}^{kt}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

1. **Résolution de l'équation sans second membre :**

   L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$. Elle a deux racines complexes conjuguées : $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = \bar{j}$.

   Les solutions *complexes* de l'équation homogène associée à (E_5) $y'' + y' + y = 0$ sont donc $t \mapsto \lambda\mathrm{e}^{jt} + \mu\mathrm{e}^{j^2 t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

   On peut montrer que ces solutions sont à valeurs réelles si, et seulement si, $\lambda = \bar{\mu}$, et alors en posant $\lambda = \dfrac{A - iB}{2}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, $y(t) = \lambda\mathrm{e}^{jt} + \mu\mathrm{e}^{j^2 t} = 2\,\text{Ré}\left(\lambda\mathrm{e}^{jt}\right)$

   $y(t) = \text{Ré}\left((A - iB)\mathrm{e}^{-t/2}\left(\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + i\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right) = \mathrm{e}^{-t/2}\left(A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$.

2. **Recherche d'une solution particulière :**

   On part de l'équation $(E_5)^\star : y'' + y' + y = \mathrm{e}^{mt}$, où $m = k + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Alors $\text{Ré}\left(\mathrm{e}^{mt}\right) = \mathrm{e}^{kt}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, donc les solutions de (E_5) sont les parties réelles des solutions de $(E_5)^\star$.

   Posons $y = \mathrm{e}^{jt}.z$ dans $(E_5)^\star$:

   $y''(t) + y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{jt}.(z'' + 2jz' + j^2 z + z' + jz + z) = \mathrm{e}^{it}.(z'' + (2j+1)z' + (j^2 + j + 1)z) = \mathrm{e}^{jt}.\left(z'' + i\sqrt{3}z'\right)$,

   donc $(E_5)^\star$ est équivalente à $z'' + i\sqrt{3}z' = \mathrm{e}^{(m-j)t} = \mathrm{e}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)t}$.

   ➤ Si $m \neq j$, c'est-à-dire si $k \neq \dfrac{-1}{2}$, on trouve une solution proportionnelle à $v(t) = \mathrm{e}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)t}$: si $z = C.v$, alors $z'' + i\sqrt{3}z' = C\left(\left(k + \dfrac{1}{2}\right)^2 - i\sqrt{3}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\right)\mathrm{e}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)t}$ qui vaut $\mathrm{e}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)t}$ si $C^{-1} = \left(\left(k + \dfrac{1}{2}\right)^2 - i\sqrt{3}\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\right)$.

   La solution particulière recherchée est obtenue en prenant la partie réelle de $C.v\mathrm{e}^{jt}$.

   Avec $k = -1$, on trouve $y_0(t) = \dfrac{1}{13}\mathrm{e}^{-t}\left(\left(4 + 13\mathrm{e}^{t/2}C_2\right)\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \left(8\sqrt{3} - 13\mathrm{e}^{t/2}C_1\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$

➤ Si $m = j$, c'est-à-dire si $k = \dfrac{-1}{2}$, on est ramené à $z'' + i\sqrt{3}z' = 1$, dont une solution est $z(t) = \dfrac{-i}{\sqrt{3}}t$.

La solution particulière recherchée est obtenue en prenant la partie réelle de $\dfrac{-i}{\sqrt{3}}t e^{jt}$.

On trouve $y_0(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t/2}\left((1+3C_2)\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \left(\sqrt{3}t + 3C_1\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$

3. Finalement, l'ensemble des solutions de (E_5) est $t \mapsto y_0(t) + A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $\quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 6

Résolution de $\boldsymbol{(E_6) : y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{sh}(t)}$

1. **Résolution de l'équation sans second membre** : L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ (et non pas $r^2 - 2r + 1 = 2\,\mathrm{sh}(t)$!). Elle a une racine double : 1.
   Les solutions de l'équation sans second membre sont donc $t \mapsto (a.t + b)e^t$.
2. **Recherche d'une solution particulière** :
   Comme $2\,\mathrm{sh}(t) = e^t + e^{-t}$, on recherche une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^t$, puis de $y'' - 2y' + y = e^{-t}$, que l'on ajoutera suivant le principe de superposition.
   En posant $y(t) = e^t z(t)$, on trouve $y'' - 2y' + y = e^t\left(z'' + 2z' + z - 2(z' + z) + z\right) = e^t z''$ donc
   $y'' - 2y' + y = e^t$ se ramène à $z'' = 1$, d'où la solution particulière $y_1 = \dfrac{t^2}{2}e^t$.
   En posant $y(t) = e^{-t}z(t)$, $y'' - 2y' + y = e^{-t}\left(z'' - 2z' + z - 2(z' - z) + z\right) = e^t(z'' - 4z' + 4z)$ donc $y'' - 2y' + y = e^{-t}$ se ramène à $z'' - 4z' + 4z = 1$, d'où la solution particulière $y_2 = \dfrac{1}{4}e^{-t}$.
3. Finalement, l'ensemble des solutions de (E_6) est $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}e^t + \dfrac{1}{4}e^{-t} + (a.t + b)e^t$, $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2.3 – Équations du second ordre à coefficients quelconques

On considère ici trois fonctions a, b, c, continues sur un intervalle I, et l'équation différentielle scalaire (linéaire et complète) d'ordre 2 :

$$(E) \qquad y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

☞ ***Remarque :*** Cette équation peut se mettre sous la forme d'un système linéaire d'ordre 1, en posant $(V) : X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. En effet, (E) et (V) équivalent à : $(\Sigma) : \begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -a(t)x_2 - b(t)x_1 + c(t) \end{cases}$, système différentiel qui s'écrit $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$.

Exemple 7

Soit par exemple l'équation $(E_4) : y''(t) - (t+1)y'(t) + ty(t) = 0$. En posant $(x_1, x_2) = (y, y')$, on trouve $x_2' = x_1'' = (1+t)x_1' - tx_1 = -tx_1 + (1+t)x_2$ donc (E_7) équivaut à $(\Sigma_7) : \begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -tx_1 + (1+t)x_2 \end{cases}$.

Méthode 3 : d'abaissement de l'ordre ou de Lagrange

Soit (E) une équation complète $A(t)\,y'' + B(t)\,y' + C(x)\,y = f(t)$ et $(E_0) : A(t)\,y'' + B(t)\,y' + C(t)\,y = 0$ l'équation homogène associée, dont on connaît *par hypothèse* une solution u non identiquement nulle.
On suppose que A, B, C, f sont continues sur I, et que A ne s'annule pas sur I.
Alors, par le changement de fonction inconnue $y = z.u$, l'équation (E) est ramenée à l'équation du premier ordre en $\omega = z'$:

$$A\,u\,\omega' + (2A\,u' + B\,u)\omega = f$$

Cette méthode permet de trouver une solution particulière (y_0) de l'équation complète, et un système fondamental de solutions de l'équation homogène, en connaissant une seule solution non nulle de de l'équation homogène, mais au prix de deux ou trois intégrations emboîtées.

Exemple 8

Reprenons l'équation $E_4 : y''(t) - (t+1)y'(t) + ty(t) = 0$, en admettant que $u : t \mapsto e^t$ est solution.
On pose $y = z.u$, alors $y' = z.u' + z'.u$ et $y'' = z.u'' + 2z'.u' + u.z''$, donc

$At'' + Bt' + Ct = (Au'' + Bu' + Cu)z + (2Au' + Bu)z' + Au.z'' = 0$.
En posant $z' = \omega$, on est ramené à l'équation $Au.\omega' + (2Au' + Bu)\omega = 0$, soit $e^t((1-t)\omega + \omega'(t)) = 0$.
Les solutions de cette équation sont $\omega : t \mapsto \exp\dfrac{t^2}{2}e^{-t}$, et donc $z(t) = C_1W(t) + C_2$, où $W(t) = \int_0^t \exp\dfrac{z^2}{2}e^{-z}dz$, C_1 et C_2 étant deux constantes réelles. Finalement les solutions de l'équation sont $t \mapsto C_2e^t + C_1W(t)e^t$.

Méthode 4 : recherche de solutions sommes de série entière

On considère une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables (en général, des fractions rationnelles). Sur un intervalle I où A ne s'annule pas, cette équation peut s'écrire sous la forme $A(t)y''(t) + B(t)y'(t) + C(t) = f(t)$, où A, B, C sont des polynômes en t.
On pose $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, et on exprime tous les termes de $A(t)y''(t) + B(t)y'(t) + C(t)$ sous la forme $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n t^n$, où $p \in \mathbb{N}^*$. L'équation de départ se ramène à une relation de récurrence sur la suite (a_n).
On recherche ensuite le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$, et dans les cas favorables, la valeur explicite de a_n en fonction de n, voire celle de $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Exemple 9

Résolution de $\boldsymbol{(E_9) : (t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0}$
On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, +\infty[$.
On recherche une condition sur la suite (a_n) pour que $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ soit solution de (E_9).

$t^2 y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n$; $3t\,y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3na_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3na_n t^n$; $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n-1}$.
$ty''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n$; $t^2y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n$;

$$(t^2+t)y''(t) + (3t+1)y'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + n(n+1)a_{n+1} + 3na_n + (n+1)a_{n+1} + a_n\right) t^n$$

$$(t^2+t)y''(t) + (3t+1)y'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n^2+2n+1)a_n + (n+1)^2 a_{n+1}\right) t^n$$

Il en résulte que $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ vérifie (E_2) si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -a_n$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n a_0$. Ceci aboutit aux solutions multiples de $\sum_{n=0} (-1)^n t^n = \dfrac{1}{1+t}$, solution sur I_2 et sur $]0, 1[$.
L'application de la méthode (3) d'abaissement de l'ordre sur l'un des intervalles I_k aboutit via l'équation $\omega(t) + t\omega'(t) = 0$ aux solutions $y \mapsto \dfrac{C_1}{1+t} + C_2\dfrac{\ln|t|}{1+t}$.

Exemple 10

Résolution de $\boldsymbol{(E_{10}) : (1-t^2)y'' - ty' + 9y = 0}$
On résout cette équation sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$.
On recherche une condition sur la suite (a_n) pour que $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ soit solution de (E_{10}).
$9y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 9a_n t^n$; $-ty'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -na_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -na_n t^n$;
$-t^2y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} -n(n-1)a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -n(n-1)a_n t^n$; $y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n$. Par combinaison linéaire

$$(1-t^2)y''(t) - ty'(t) + 9y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + \left(-n^2+n-n+9\right)a_n\right) t^n$$

$$(1-t^2)y''(t) - ty'(t) + 9y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (3-n)(3+n)a_n\right) t^n.$$

Donc (E) se ramène à la relation de récurrence $(T_n) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+3)(n-3)a_n$.
En particulier, avec $n = 3$, on trouve $a_5 = 0$ puis par récurrence sur $p \geqslant 2$: $a_{2p+1} = 0$.
Alors les conditions initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ amènent à une solution polynomiale de degré 3 : $u(t) = t - \dfrac{4t^3}{3}$.

De même, les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ amènent à une solution paire v, développable en série entière, de rayon de convergence 1 : $v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} t^{2n}$ avec $a_{2n+2} = \frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)} a_{2n}$.

$$v(t) = 1 - \frac{9t^2}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3(2n-4)!(2n+1)}{4^{n-1} n!(n-2)!} t^{2n}.$$

Pour les plus courageux, la méthode de l'abaissement du degré, avec comme solution $u(t) = 3t - 4t^3$, aboutit à l'équation : $\left(6 - 33t^2 + 28t^4\right)\omega + t\left(3 - 7t^2 + 4t^4\right)\omega' = 0$ et finalement à $v(t) = \cos\left(3\arcsin(t)\right)$.