CHAPITRE 12 **EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES** **2024/2025**

1 — Une équation du premier ordre à coeffs variables

Soit l'équation : $(x^2-1)y'+2xy=2x^3-x$
L'équation homogène associée est $(x^2-1)y'+2xy=0$.
l'ensemble des solutions **sur $]-1,1[$** est une droite vectorielle.

Au brouillon, écrivons $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{-2x}{x^2-1}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln|x^2-1|\right)$.

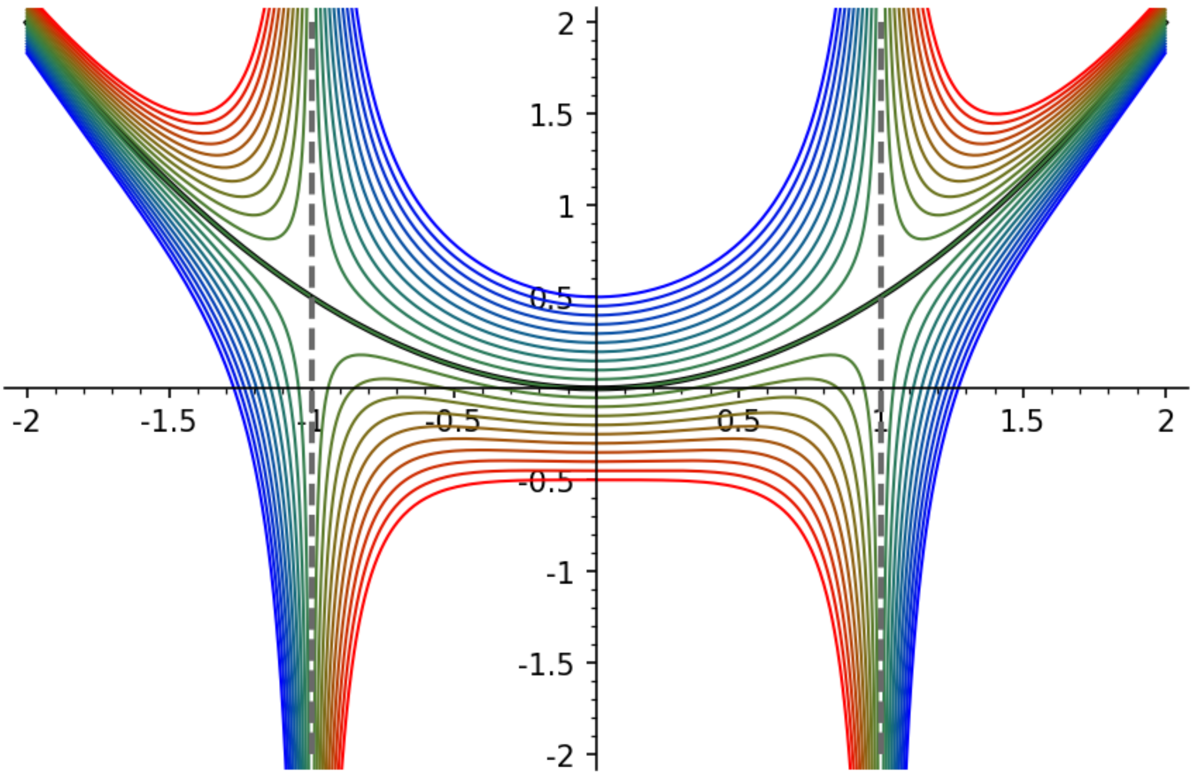
Par intégration, on obtient $\ln y=-\ln|x^2-1|+cte$; $y(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ convient sur $]-1,1[$.

l'ensemble des solutions sur $]-1,1[$ est la droite vectorielle dirigée par $\boldsymbol{u(x)=\dfrac{1}{x^2-1}}$.

Appliquons la méthode de variation de la constante, en cherchant des solutions $y(x)=k(x)u(x)=\dfrac{k(x)}{x^2-1}$.
$y'=k'u+ku'$ donc $(x^2-1)y'-2xy=(x^2-1)(k'u+ku')-2xku=(x^2-1)uk'+\big((x^2-1)u'-2xu\big)k=k'$.
L'équation complète $(x^2-1)y'-2xy=2x^3-x$ devient donc $k'(x)=2x^3-x$; $k(x)=\dfrac{x^4-x^2}{2}$ convient, donc

$\boldsymbol{y(x)=\dfrac{x^4-x^2}{2}.\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{x^2}{2}}$ **est une solution particulière de l'équation complète**.

La solution générale de l'équation complète est $\boldsymbol{y(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{C}{1-x^2},\quad C\in\mathbb{R}}$.



Courbes intégrales de l'équation sur les intervalles de résolution.
En plus gras, la solution $x\mapsto\dfrac{x^2}{2}$, polynomiale, prolongeable sur $\mathbb{R}$.

2 — Une équation du second ordre à coefficients variables

On considère l'équation linéaire du second ordre : $(x^2-1)y''+3xy'+y=0$

On cherche les solutions de cette équation développables en série entière :

$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. (avec un rayon de convergence R)

$3xy'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} 3na_n x^n=\sum_{n=1}^{+\infty} 3na_n x^n$.

$-y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} -n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty} -(n+2)(n-1)a_{n+2}x^n$.

$x^2y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$.

Donc $(x^2-1)y''+3xy'+y=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-(n+1)(n+2)a_{n+2}+(n(n-1)+3n+1)\,a_n\right)x^n$.

Alors $(x^2-1)y''+3xy'+y=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left((n+2)a_{n+2}-(n+1)a_n\right)x^n$

Donc $(x^2-1)y''+3xy'+y=0$ si, et seulement si : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)a_{n+2}=(n+1)a_n}$.

Si on prend $a_0=1, a_1=0$, on montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ $a_{2n+1}=0$, obtenant ainsi une solution *paire* u.

Si on prend $a_0=0, a_1=1$, on montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ $a_{2n}=0$, obtenant ainsi une solution *impaire* v.

Alors l'ensemble des solutions DSE de l'équation différentielle est le plan vectoriel **Vect**$\boldsymbol{(u,v)}$: comme l'ensemble de toutes les solutions est de dimension 2, on en déduit que les deux ensembles sont égaux, et donc que **toutes les solutions de l'équation sont DSE.**

Donc $(x^2-1)y''+3xy'+y=0$ si, et seulement si : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}, (n+2)a_{n+2}=(n+1)a_n}$.

En remplaçant n par $2k$, on trouve $a_{2k+2}=\dfrac{2k+1}{2k+2}a_{2k}$, donc :

$\left|\dfrac{a_{2k+2}x^{2k+2}}{a_{2k}x^{2k}}\right|=\left|\dfrac{2k+1}{2k+2}x^2\right|\to|x^2|$; le critère de d'Alembert montre que **le rayon de convergence de $\boldsymbol{u}$ est** 1.

De même, le rayon de convergence de v est 1, et toutes les solutions de l'équation sont des séries entières de rayon de convergence égal à 1.

$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=\dfrac{2k+1}{2k+2}$ donne $\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{2k+1}{2k+2}$ soit $\dfrac{a_{2n}}{a_0}=\dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}$: $\boldsymbol{u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}x^{2n}}$.

Donc $(x^2-1)y''+3xy'+y=0$ si, et seulement si :

$$\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}, (n+2)a_{n+2}=-(n+1)a_n}.$$

En remplaçant n par $2k-1$, on trouve $a_{2k+1}=-\dfrac{2k}{2k+1}a_{2k-1}$, donc :

$\dfrac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}=-\dfrac{2k}{2k+1}$ donne $\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{a_{2k}}{a_{2k}}=\prod_{k=0}^{n-1}-\dfrac{2k}{2k+1}$ soit $\dfrac{a_{2n+1}}{a_1}=(-1)^n\dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}$: $\boldsymbol{v(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$.

On peut remarquer que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-1-2n}{2}}{1.2\cdots n}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n.n!)^2}x^{2n}$,

et alors $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

En posant $y(x)=z(x)u(x)$, l'équation $(x^2-1)y''+3xy'+y=0$ se ramène à $(t^2-1)z''+tz'=0$, soit (en posant $z'=\omega$)

$$(t^2-1)\omega'+t\omega=0.$$

On trouve $\omega(z)=\dfrac{C_1}{\sqrt{1-t^2}}$, puis $z(t)=C_1\arcsin t+C_2$, et enfin

$$\boldsymbol{y(t)=C_1\frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{C_2}{\sqrt{1-t^2}}}.$$