CHAPITRE 11 VARIABLES ALÉATOIRES (EXEMPLES) 2024/2025

1 — Loi binomiale et Bienaymé-Tchebychev

1.1 – loi binomiale

M. Poissard a l'habitude de faire le plein de sa voiture dans une station-essence munie de six pompes. Chacune de ces pompes est occupée avec une probabilité qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$, de manière indépendante des autres.
Quel est la probabilité que toutes les pompes soient occupées ? Combien de pompes sont occupées, en moyenne ?

réponse

Soit, pour $1 \leqslant k \leqslant 6$, la variable aléatoire P_k qui vaut 1 si la pompe numéro k est occupée et 0 sinon. Par hypothèse, P_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p, et P_i, P_j sont indépendantes si $i \neq j$. Alors $X = P_1 + \cdots + P_6$ suit la loi binomiale de paramètre $n = 6$ et p.

La probabilité que toutes les pompes soient occupées est $\mathbb{P}(X=6) = \binom{6}{6} p^6 (1-p)^0 = p^6$;

En moyenne, il y a $\mathbb{E}(X) = 6p$ pompes occupées.

1.2 – Bienaymé-Tchebychev

M. Poissard a constaté qu'à chacune de ses N visites, toutes les pompes étaient occupées et il manifeste des signes de paranoïa. Son psychanalyste, le docteur Pipeau, tente de lui faire entendre raison en majorant la probabilité de cet évènement.
Pour cela, il appelle X_k le nombre de pompes occupées à la $k^{\text{ème}}$ visite, suppose que les X_k sont mutuellement indépendantes, appelle $M = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$ la moyenne du nombre de pompes occupées, et il applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M.
Quelle est l'espérance de M ? Sa variance ?
On prend pour l'application numérique : $p = \dfrac{1}{5}, N = 100$. Quelle majoration de $\mathbb{P}(|M-3| \geqslant 3)$ donne l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?

réponse

L'espérance étant linéaire, $\mathbb{E}(M) = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X_1) = 6p$.

Comme les X_k sont indépendantes, $\mathbb{V}(M) = \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k\right) = \dfrac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{V}(X_k) = \dfrac{N\mathbb{V}(X_1)}{N^2} = \dfrac{6p(1-p)}{N}$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors $\mathbb{P}(|M - \mathbb{E}(M)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(M)}{3^2}$, soit $\mathbb{P}(|M-6p| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{6p(1-p)}{3^2 N}$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(|M-3| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{\frac{6}{4}}{3^2 \times 100} = \dfrac{1}{600}$.

1.3 – Conclusion

Ceci ne calme pas M. Poissard. Il déclare au Dr Pipeau :
« Vous n'avez pas du tout calculé la probabilité de $M = 6$! La vraie valeur est bien plus petite, et je vais vous le montrer ! »
M. Poissard a-t-il raison sur le fond ?

réponse

Tout d'abord $(|M-3| \geqslant 3) = (M=0) \cup (M=6)$, dont la probabilité est le double de $(M=6)$ si $p = \dfrac{1}{2}$.

Mais de plus, la majoration de Bienaymé-Tchébychev est large ; et, en l'occurrence, $(M=6) = \bigcap_{k=1}^{N}(X_k = 6)$, donc $\mathbb{P}(M=6) = \mathbb{P}(X_k = 6)^N = p^{6N}$. Avec $p = \dfrac{1}{2}$ et $N = 100$, on trouve une probabilité proche de $2.5.10^{-180}$.
M. Poissard a raison sur le fond. Hélas, M. Pipeau va en profiter pour lui revendre sa propre voiture électrique, une Tulsa Time [1] peu fiable et de faible autonomie…

1. marque et modèle fictifs, bien sûr !

2 — Deux lois géométriques

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi de géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

2.1 – somme de lois géométriques

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(X=k)$? $\mathbb{P}(X \geqslant k)$? $\mathbb{G}_X(t)$?
Soit $\alpha = \mathbb{E}(X)$, montrer que $\mathbb{V}(X) = \alpha(\alpha-1)$.
Calculer $\mathbb{E}(X+Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y)$ et en déduire que $X+Y$ ne suit pas une loi géométrique.

réponse

On rappelle que si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $\mathbb{P}(X=k) = p\,q^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} p\,q^{i-1} = p\,q^{k-1}\sum_{j=0}^{+\infty} p\,q^j = \frac{p}{1-q}q^{k-1}$ donc $\boldsymbol{\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^{k-1}}$.

La série caractéristique de X est définie par $\mathbb{G}_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} p\,q^{k-1}t^k = p\,t\sum_{k=1}^{+\infty}(q\,t)^k$, soit $\mathbb{G}_X(t) = \frac{p\,t}{1-q\,t}$ avec un rayon de convergence $R = \frac{1}{q}$.
On retrouve ainsi $\mathbb{E}(X) = \mathbb{G}'_X(1) = \frac{1}{p}$, et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{G}''_X(1) + \mathbb{G}'_X(1) - \left(\mathbb{G}'_X(1)\right)^2 = \frac{q}{p^2}$; si on pose $\alpha = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, alors $\alpha(\alpha-1) = \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{q}{p^2} = \mathbb{V}(X)$.
Alors $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) = 2\alpha$, et par indépendance de X et Y, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y) = 2\alpha(\alpha-1) \neq 2\alpha(2\alpha-1)$, donc $\boldsymbol{X+Y}$ **ne suit pas une loi géométrique**.

2.2 – X et Y ont la même loi mais sont différentes

Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.

réponse

Les évènements $(Y=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forment une famille complète ; en appliquant la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=Y|Y=k)\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}p^2q^{2k-2} = p^2\sum_{j=0}^{+\infty}(q^2)^j = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{2-p}$. Si $p \in]0,1[$, alors $\frac{p}{2-p} < 1$, donc $\boldsymbol{X=Y}$ **est [presque sûrement] faux**.

2.3 – maximum et minimum de X et Y

On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$, et on considère $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}(U \geqslant k) = \mathbb{P}((X \geqslant k) \cap (Y \geqslant k))$ et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(U \geqslant k)$.
Montrer que $\mathbb{P}(U=k) = \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1)$ et en déduire que U suit une loi géométrique de paramètre à préciser.
Déterminer de manière analogue la loi de V. Est-elle géométrique ?

réponse

$\min(U \geqslant k) = (X \geqslant k) \cap (Y \geqslant k)$, donc par indépendance de X et Y : $\mathbb{P}(U \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k)\mathbb{P}(Y \geqslant k) = q^{2k-2}$;
or $(U \geqslant k) = (U=k) \cup (U>k) = (U=k) \cup (U \geqslant k+1)$ donc $(U=k) = (U>k) \setminus (U \geqslant k+1)$, et alors $\mathbb{P}(U=k) = \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1) = q^{2k-2} - q^{2k} = \left(1-q^2\right)\left(q^2\right)^{k-1}$ soit $\boldsymbol{U \sim \mathscr{G}\left(1-q^2\right)}$.
De même : $\mathbb{P}(X \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(X>k) = 1-\mathbb{P}(X \geqslant k+1) = 1-q^k$, et de plus
$\max(V \leqslant k) = (X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)$, donc par indépendance de X et Y : $\mathbb{P}(V \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k) = \left(1-q^k\right)^2$.
or $(V \leqslant k) = (V=k) \cup (V<k) = (V=k) \cup (V \leqslant k-1)$ donc $(V=k) = (V \leqslant k) \setminus (V \leqslant k-1)$, et alors
$\mathbb{P}(V=k) = \mathbb{P}(V \geqslant k) - \mathbb{P}(V \geqslant k-1) = \left(1-q^k\right)^2 - \left(1-q^{k-1}\right)^2 = \left(q^k-q^{k-1}\right)\left(q^k+q^{k-1}\right) = q^k(1-q)\,q^{k-1}(1+q)$;
$\boldsymbol{\mathbb{P}(V=k) = q^{2k-1}p(2-p)}$
Comme $(\mathbb{P}(V \leqslant k))$ n'est pas une suite géométrique, $\boldsymbol{V}$ **ne suit pas une loi géométrique**.