

**CHAPITRE 10****ESPACES PROBABILISÉS DÉNOMBRABLES****2023/2024****1 — Espaces dénombrables****Définition : ensemble dénombrable**

Soit  $E$  un ensemble, on dit que  $E$  est **dénombrable** lorsqu'il existe une bijection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ .

Un ensemble fini ou dénombrable est dit **au plus dénombrable**.

Autrement dit, un ensemble est fini ou dénombrable s'il peut être décrit en extension sous la forme  $\{x_i, i \in I\}$  où  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Quelques exemples (1)**

- $2\mathbb{N}$ , ensemble des entiers pairs, est dénombrable (bien qu'il soit une partie stricte de  $\mathbb{N}$ );
- $\mathbb{Z}$  est dénombrable;
- Si  $A$  et  $B$  sont dénombrables, alors  $A \times B$  est dénombrable;
- $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable (résultat dû à Cantor).

**2 — Espaces probabilisés****Définition : réunion et intersection infinies**

Soit  $\Omega$  un ensemble, et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties de  $\Omega$ .

Alors, pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \exists p \in \mathbb{N}, x \in A_p \quad \text{et} \quad x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \forall p \in \mathbb{N}, x \in A_p$$

**Définition : tribu**

Soit  $\Omega$  un ensemble (appelé **univers**), on note  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ .

On appelle **tribu** une partie  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ .
3. Pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ , la réunion  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

**Commentaires :**

Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés des **événements**.

D'après les lois de DE MORGAN :  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  et  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ , l'intersection de deux événements est un événement,

et même : pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ , l'intersection  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

**Définition : liens entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire probabiliste**

On introduit en probabilité un nouveau vocabulaire résumé par le tableau suivant ( $A$  et  $B$  sont deux événements) :

| notation                                                                     | vocabulaire ensembliste   | vocabulaire probabiliste             |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| $\Omega$                                                                     | « univers »               | événement <b>certain</b>             |
| $\emptyset$                                                                  | ensemble vide             | événement <b>impossible</b>          |
| $\{\omega\}$                                                                 | singleton                 | événement <b>élémentaire</b>         |
| $A \cup B$                                                                   | réunion                   | $A$ ou $B$                           |
| $A \cap B$                                                                   | intersection              | $A$ et $B$                           |
| $A \cap B = \emptyset$                                                       | $A$ et $B$ sont disjoints | $A$ et $B$ sont <b>incompatibles</b> |
| $A \sqcup B$ c'est-à-dire<br>$A \cup B$ (avec $A \cap B = \emptyset$ )       | réunion disjointe         | $A$ ou bien $B$                      |
| $\bar{A} = \Omega \setminus A$                                               | complémentaire de $A$     | <b>contraire</b> de $A$              |
| $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$<br>$\bigcup_{n \in I} A_n = \Omega$ | partition de $\Omega$     | <b>système complet</b> d'événements  |

**Définition : événements incompatibles**

Une suite d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **incompatible** si chaque événement  $A_k$  est incompatible avec la réunion des autres. C'est le cas d'un système complet d'événements.

1

Tère année

**Définition : probabilité**

Soit  $\Omega$  un ensemble et  $\mathcal{A}$  une tribu de  $\Omega$ , on appelle **probabilité** sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  toute application  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{A}$  dans  $[0, 1]$  telle que :

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
2. Pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'évènements incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est alors appelé **espace probabilisé**.

**Propriétés (1) : rappels de première année**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, alors

- Pour tout couple d'évènements incompatibles  $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .
- De manière plus générale, pour tous  $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
- Pour tout évènement  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Pour tous  $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ ,  $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

**Exemple 2**

On considère un dé cubique parfait, c'est-à-dire que la probabilité que la face supérieure affiche un des six nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 est la même (elle vaut donc  $\frac{1}{6}$ ).

On décide que l'ensemble  $\Omega$  est  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , et que l'ensemble  $\mathcal{A}$  est égal à  $\mathcal{P}(E)$ .

Les évènements élémentaires  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$  sont dits **équiprobables**.

Considérons  $A = \{2, 4, 6\}$  (lancer aboutissant à un nombre pair) et  $B = \{4, 5, 6\}$  (lancer supérieur à 4).

Alors  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}$  et  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$ .

**Propriété 2 : continuité croissante**

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'évènements telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

**Propriété 3 : continuité décroissante**

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'évènements telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{n+1} \subset A_n$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

**Propriété 4 : sous-additivité**

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'évènements *quelconques*, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

☞ **Remarque :** il est possible que la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  diverge; dans ce cas, cette propriété n'apporte rien.

**Définition : évènements presque sûrs, presque impossibles**

Un évènement  $A$  est dit **presque sûr** si  $\mathbb{P}(A) = 1$ , et presque impossible (ou négligeable) si  $\mathbb{P}(A) = 0$ .

L'évènement sûr est presque sûr, et tout évènement impossible est négligeable.

La réciproque est fautive si  $\Omega$  est infini : par exemple, au cours d'une infinité de lancers d'un dé cubique parfait, obtenir uniquement des six est presque impossible, mais pas impossible; obtenir au moins un six est presque sûr, mais pas sûr.

### 3 — Conditionnement et indépendance

**Définition : Probabilité conditionnelle**

Si  $A$  et  $B$  sont deux évènements tels que  $\mathbb{P}(B) > 0$ , on appelle **probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$**  le réel

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

On note également  $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B)$ .

La probabilité conditionnelle ne peut pas être définie par rapport à un évènement presque impossible :  $\mathbb{P}(B) = 0$ .

## Exemple 3

On considère trois cartes, portant sur chacune de leur face une des deux couleurs rouge ou bleue. L'une des cartes a ses deux faces rouges, la deuxième a ses deux faces bleues, la troisième a une face rouge et une face bleue.

On choisit une des cartes au hasard, et on la pose sur une table dans un sens aléatoire (à l'envers ou à l'endroit, au hasard). Bien sûr, on ne voit que la face supérieure.

L'univers étudié est l'ensemble des couples (couleur de la face supérieure, couleur de la face inférieure) possibles.

On considère les événements  $A$  : « la face inférieure est rouge » et  $B$  : la face « supérieure est bleue ».

Quelle est la probabilité que « la face inférieure soit rouge » ( $A$ ) sachant que « la face supérieure est bleue » ( $B$ ) ?

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \text{ (il y a autant de faces rouges que de bleues);}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{ (sur les six possibilités équiprobables, une seule correspond à } A \cap B \text{). Donc } \mathbb{P}(A | B) = \frac{1}{3}.$$

## Propriété 5 : la probabilité conditionnelle est une probabilité

L'application  $\mathbb{P}_B$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

## 4 — Extension des résultats vus en première année

## Propriété 6 : formule des probabilités composées

Soit  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  une suite finie d'événements, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(A_k \mid \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | (A_1 \cap A_2)) \cdots \mathbb{P}(A_n | (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})) \end{aligned}$$

Cette formule doit être utilisée dans une succession d'épreuves avec une condition d'arrêt (en cas d'échec à une épreuve, on s'arrête, et donc l'événement  $A_{n+1}$  n'a de sens que si tous les précédents  $A_1, \dots, A_n$  correspondent à une réussite).

## Exemple 4

Célestine est poursuivie par les assiduités de Léandre, son voisin de résidence universitaire. Pour s'en débarrasser, elle lui a expliqué qu'elle sortirait avec lui quand il gèlerait en enfer, mais cela n'a pas suffi. Elle lui propose donc le jeu suivant :

Léandre doit se procurer une urne qui contient initialement une boule verte et une boule rouge, et une quantité extravagante de boules vertes, indiscernables au toucher.

Mathilde, l'amie de Célestine, procèdera à une série de tirages au hasard avec remise suivant les règles suivantes :

- \* Si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne, en même temps qu'une autre boule verte;
- \* si on tire une boule rouge, on arrête le jeu et Célestine accepte l'invitation de Léandre à dîner.

Heureusement, peut-être parce que Mathilde (qui déteste Léandre) est très habile, la fatidique boule rouge met du temps à apparaître...

En notant  $R_n$  l'événement : le  $n^{\text{ème}}$  tirage aboutit à une boule rouge, et  $V_n$  l'événement : le  $n^{\text{ème}}$  tirage aboutit à une boule verte, l'arrêt du jeu au  $n^{\text{ème}}$  tirage est défini par  $A_n = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1} \cap R_n$ .

Si on tire  $n-1$  boules vertes successives, l'urne contient une boule rouge et  $1+n-1 = n$  boules vertes; donc pour

$$n \geq 1 : \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) = \frac{n}{n+1}, \text{ c'est-à-dire } \mathbb{P}(V_n | V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) = \frac{n}{n+1} \text{ et } \mathbb{P}(R_n | V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) = \frac{1}{n+1}$$

La formule des probabilités composées donne alors, pour  $n \geq 1$  :

$$\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(V_k | V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{k-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n} \text{ par télescopage, et alors } \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap$$

$$V_{n-1} \cap R_n) = \mathbb{P}(R_n | V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Les événements  $A_n$  sont incompatibles; la probabilité que le jeu s'arrête (avec une boule rouge) vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 \text{ après télescopage, donc } A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \text{ est presque sûr.}$$

## Définition : Système complet dénombrable d'événements

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements incompatibles de  $\mathcal{A}$  telle que

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$$

On dit alors que  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **un système complet dénombrable d'événements**.

**Définition : système quasi complet d'évènements**

Une suite d'évènements incompatibles  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme un système quasi complet d'évènements lorsque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1.$$

Ceci peut être obtenu en purgeant un système complet de ses évènements négligeables.

**Propriété 7 : formule des probabilités totales**

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'évènements, alors la série  $\sum \mathbb{P}(B \cap A_n)$  converge et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B | A_n) \mathbb{P}(A_n)$$

(On adopte la convention :  $\mathbb{P}(B | A_n) \mathbb{P}(A_n) = 0$  lorsque  $\mathbb{P}(A_n) = 0$ .)

Ceci s'étend au cas d'une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'évènements deux à deux incompatibles tels que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$ .

**Exemple 5**

L'ours Veguie adore les fruits. Il apprécie particulièrement ceux de trois arbres : un abricotier (A), un brugnionier (B) et un cerisier (C), qui portent tous trois des fruits en cette fin juin.

Lorsqu'il a mangé des abricots, il y a une chance sur deux qu'il se déplace vers le cerisier, et une chance sur deux vers le brugnionier.

S'il s'est régalé de brugnons, il y a une chance sur trois qu'il ait envie d'abricots, une sur six qu'il continue à manger des brugnons, et une sur deux que les cerises le tentent.

S'il vient de se nourrir de cerises, il y a une chance sur trois qu'il reste sur place, une sur trois qu'il aille vers l'abricotier, et une sur trois qu'il migre vers le brugnionier.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle  $A_n$  (respectivement  $B_n/C_n$ ) l'évènement « au  $n^{\text{ème}}$  repas, l'ours est au pied de (A) (respectivement (B/C)). », et on pose  $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ ,  $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ , et  $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(A_n, B_n, C_n)$  forment un système complet d'évènements, donc  $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} | B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} | C_n) \cdot \mathbb{P}(C_n)$  soit  $a_{n+1} = 0 \cdot a_n + \frac{1}{3} b_n + \frac{1}{3} c_n$ .

De même  $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} | C_n) \cdot \mathbb{P}(C_n)$  soit  $b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + \frac{1}{6} b_n + \frac{1}{3} c_n$ .

et  $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_{n+1} | A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} | B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1} | C_n) \cdot \mathbb{P}(C_n)$  soit  $c_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{3} c_n$ .

Donc, en posant  $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  :  $V_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot V_n$

**Exemple 6**

On considère une suite infinie de lancers d'un dé cubique parfait, et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les évènements  $S_n$  « on obtient un six au  $n^{\text{ème}}$  lancer » et  $F_n$  « on obtient un six pour la première fois au  $n^{\text{ème}}$  lancer ».

Les évènements  $S_n$  ne sont pas incompatibles, mais les  $F_n$  le sont, car il n'y a qu'une première fois.

Par ailleurs,  $S_n = F_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{F_k}\right)$ , donc  $\bigcup_{k=1}^n S_k = \bigcup_{k=1}^n F_k$  d'une part, et d'autre part par indépendance mutuelle des lancers

successifs :  $\mathbb{P}(F_k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ . Alors, par application de la  $\sigma$ -additivité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \frac{1 - \frac{5^n}{6^n}}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \frac{5^n}{6^n} \text{ donc par passage à la limite (continuité croissante) : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = 1.$$

**Les évènements  $F_k$  forment un système quasi-complet d'évènements.**

**Propriété 8 : formule de Bayes**

► Soit  $(A, B) \in \mathcal{A}^2$  avec  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

► Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système [quasi]-complet d'évènements, tel que  $\mathbb{P}(A_j) > 0$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , et soit  $B$  un évènement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B | A_n) \mathbb{P}(A_n)}$$

**Exemple 7**

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $\frac{1}{2}$ .

On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.

Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?

Considérons les événements :  $T$  : « *Le dé est pipé* » et  $S$  : « *On obtient le chiffre 6* »

D'après la formule de Bayes :  $\mathbb{P}_S(T) = \mathbb{P}(T|S) = \frac{\mathbb{P}(S|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(S|\bar{T})\mathbb{P}(\bar{T})}$

Or  $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(S|\bar{T})\mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ , donc  $\mathbb{P}_S(T) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ .

### Exemple 8

#### La ruine du joueur

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$  avec  $p \neq \frac{1}{2}$ . On note  $q = 1 - p$ , et  $r = \frac{q}{p}$ .

On joue à un jeu de pile ou face. À chaque coup, on a la probabilité  $p$  d'obtenir pile, et dans ce cas on gagne 1 euro, et la probabilité  $q = 1 - p$  d'obtenir face, et dans ce cas on perd 1 euro.

On suppose que l'on ne peut jouer que si l'on dispose d'au moins 1 euro.

Le jeu s'arrête soit lorsqu'on possède la somme de  $N$  euros exactement, soit lorsqu'on ne possède plus rien (on est alors ruiné).

Au départ, on dispose d'une somme de  $n$  euros exactement (avec  $0 \leq n \leq N$ ), et on note  $\mathbb{P}_N(n)$  la probabilité de gagner la partie.

Si  $n = 0$ , on ne peut pas gagner, donc  $\mathbb{P}_N(0) = 0$ ; lorsque  $n = N$ , on a gagné dès le départ, donc  $\mathbb{P}_N(N) = 1$ .

On note alors  $P_1$  [respectivement  $F_1$ ] l'évènement « *on obtient pile [respectivement face] au premier lancer* » et  $G$  : « *le joueur a gagné* ».

La famille  $(P_1, F_1)$  est un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(F_1) \mathbb{P}(G|F_1) + \mathbb{P}(P_1) \mathbb{P}(G|P_1) = p \mathbb{P}(G|F_1) + (1-p) \mathbb{P}(G|P_1).$$

Si  $P_1$  est réalisé, on gagne 1 euro au premier coup, et la probabilité de gagner est donc la probabilité de gagner avec une somme initiale de  $n + 1$  euros, c'est-à-dire :  $\mathbb{P}(G|P_1) = \mathbb{P}_N(n + 1)$ , et de même  $\mathbb{P}(G|F_1) = \mathbb{P}_N(n - 1)$ , donc finalement  $\mathbb{P}_N(n) = p \mathbb{P}_N(n + 1) + (1-p) \mathbb{P}_N(n - 1)$ .

La suite de terme général  $u_n = \mathbb{P}_N(n)$  est donc définie par les relations  $u_{n+1} = \frac{1}{p} u_n - \frac{q}{p} u_{n-1}$ , et  $u_0 = 0$  et  $u_N = 1$ .

On démontre qu'une telle suite est de la forme  $u_n = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot r^n$ , avec  $\alpha = -\beta = \frac{1}{1 - r^N}$ , et donc  $\mathbb{P}_N(n) = \frac{1 - r^n}{1 - r^N}$ .

$$* \text{ si } p > q, \text{ alors } r < 1 \text{ donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^n}{1 - r^N} = 1 - r^n.$$

Lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ ,

$$* \text{ si } p < q, \text{ alors } r > 1 \text{ donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^n}{1 - r^N} = 0 : \text{ la ruine est presque sûre.}$$

#### Définition : indépendance de deux évènements

Soit  $(A, B) \in \mathcal{A}$ , avec  $\mathbb{P}(B) > 0$ , on dit que **les évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants** lorsque

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$ .

#### Propriété 9 : indépendance des complémentaires

Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $\bar{B}$  le sont aussi.

### Exemple 9

On considère le jet de deux dés cubiques parfaits, et on considère les chiffres (de 1 à 6) indiqués par leur face supérieure. Bien sûr, chaque couple  $(p, q) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$  constitue un évènement équiprobable de probabilité  $\frac{1}{36}$ .

Soit  $A$  l'évènement « *la somme des chiffres indiqués par les dés est paire* » et  $B$  l'évènement « *la somme des chiffres indiqués par les dés est strictement supérieure à 6* »

Le lecteur vérifiera le tableau suivant, où  $s$  est la somme des chiffres :

| $s$               | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $36\mathbb{P}(s)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3  | 2  | 1  |
| $\{s\} \subset A$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1  | 0  | 1  |
| $\{s\} \subset B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  |

Il en résulte que :  $\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ , et  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{5+3+1}{36} = \frac{1}{4} \neq \frac{7}{24} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ;

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3}{7} \neq \mathbb{P}(A)$ . **Les évènements  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.**

**Définition : indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements**

On dit que la famille  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  d'événements est **mutuellement indépendante** lorsque, pour toute partie  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

**Propriété 10 : indépendance mutuelle des complémentaires**

Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$   $n$  événements indépendants, et pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_k \in \{A_k, \overline{A_k}\}$  (c'est-à-dire que  $X_k$  est soit  $A_k$ , soit son complémentaire).

Si  $(A_1, \dots, A_n)$  sont mutuellement indépendants, alors  $(X_1, \dots, X_n)$  sont mutuellement indépendants.

**Remarque :**

Les événements d'une famille mutuellement indépendante sont bien sûr indépendants deux à deux, mais la dépendance deux à deux des événements d'une famille n'implique pas son indépendance mutuelle.

En effet, pour vérifier que les d'événements  $(A_i)_{i \in I}$  sont **indépendants deux à deux**, il faut vérifier que, pour tout couple  $(i, j) \in I^2$ ,  $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ ;

Pour que les événements  $(A_i)_{i \in I}$  sont **indépendants mutuellement**, il faut vérifier en plus que, pour tout triplet  $(i, j, k) \in I^3$ ,  $\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(A_k)$ , puis faire la même vérification pour tous les quadruplets (si  $\text{card}(I) \geq 4$ ), etc.

Les exemples suivants illustrent la non-équivalence des deux notions.

**Exemple 10**

On fait un sondage auprès de familles ayant deux enfants.

On suppose la naissance de filles et de garçons équiprobables, et on considère les trois événements suivants :

1.  $A$  : « La fratrie est mixte ; »
2.  $B$  : « L'enfant aîné est une fille ; »
3.  $C$  : « Le cadet est un garçon. »

$A, B, C$  sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants. En effet :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(C \cap B) = \frac{1}{4}.$$

**Exemple 11**

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés,

avec les événements suivants :

- $A_1$  « la somme des chiffres indiqués par les dés est paire » **en gras**  
 $A_2$  « le chiffre indiqué par le premier dé est pair » **fond gris**  
 $A_3$  « le chiffre indiqué par le deuxième dé est pair » *italique*

|   | 1        | 2        | 3        | 4         | 5         | 6         |
|---|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | <b>2</b> | 3        | <b>4</b> | 5         | <b>6</b>  | 7         |
| 2 | 3        | <b>4</b> | 5        | <b>6</b>  | 7         | <b>8</b>  |
| 3 | <b>4</b> | 5        | <b>6</b> | 7         | <b>8</b>  | 9         |
| 4 | 5        | <b>6</b> | 7        | <b>8</b>  | 9         | <b>10</b> |
| 5 | <b>6</b> | 7        | <b>8</b> | 9         | <b>10</b> | 11        |
| 6 | 7        | <b>8</b> | 9        | <b>10</b> | 11        | <b>12</b> |

Il apparaît sur le tableau, par un comptage rapide des cases en gris, des cases en gras et des cases en italique, que  $\mathbb{P}(A_k) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ , et par un comptage des cases en italique gras etc., que  $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$  pour  $1 \leq i \neq j \leq 3$ ; **les événements  $(A_1, A_2, A_3)$  sont donc indépendants deux à deux.**

Cependant, en recensant les cases en italique gras et grisées, on trouve que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \neq \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3), \text{ ce qui est normal puisque } A_3 \subset A_1 \cap A_2.$$

**les événements  $(A_1, A_2, A_3)$  ne sont donc pas indépendants mutuellement.**