

CHAPITRE 8**INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES (EXEMPLES)****2024/2025****1 — Nature et valeur de $\int_0^1 te^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.**

$t \mapsto te^{-t}$ et $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ sont continues et positives sur $[0; +\infty[$.

En vertu des croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 e^{-t} = 0$ donc $te^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} = 0$ donc $e^{-\sqrt{x}} = o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

En tenant compte de la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, ceci garantit la convergence des deux intégrales

$$\int_0^1 te^{-t} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Posons en vue d'une intégration par parties dans $\int_0^1 te^{-t} dt$: $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$.

Alors $u(t)v(t) = -te^{-t}$ qui vaut 0 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$, donc le crochet $[uv]_0^{+\infty}$ converge et vaut 0 :

$$\int_0^1 te^{-t} dt = 0 - \int_0^1 -e^{-t} dt = 1. \text{ Finalement } \int_0^1 te^{-t} dt = 1.$$

Effectuons dans $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ le changement de variable $x = t^2$, $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$: $dx = 2t dt$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ et alors $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2$.

2 — Nature et valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt$.

On considère $x > 0$, et on veut calculer $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt$.

Comme $|e^{-xt} \cos(2t)| \leq e^{-xt}$ et que $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto e^{-xt} \cos(2t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire que $G(x)$ converge.

De même $|e^{-xt} \cos(2t)| = e^{-xt}$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{2it} dt$ converge, et $G(x) = \operatorname{Ré} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{2it} dt \right)$.

Or, pour $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{2it} dt = \int_0^{+\infty} e^{(-x+2i)t} dt = \left[\frac{e^{(-x+2i)t}}{-x+2i} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-2i} = \frac{x+2i}{x^2+4}$; en passant à la partie réelle,

on trouve $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt = \frac{x}{x^2+4}$.

3 — Nature et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \ln t}{1+t^3} dt$.

$h : t \mapsto \frac{\sqrt{t} \ln t}{1+t^3}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, positive sur $]0; 1]$ et négative sur $]1; +\infty[$. De plus, $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$ (croissances comparées) donc h est prolongeable par continuité sur $[0; +\infty[$.

$t^2 h(t) = \frac{t^{5/2} \ln t}{1+t^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$ donc $h(t) = o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui garantit l'intégrabilité de h « au voisinage de $+\infty$ », donc sur $[0; +\infty[$.

Pour déterminer la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \ln t}{1+t^3} dt$, on va effectuer un changement de variable $u = \frac{1}{t}$ (cette méthode doit faire l'objet d'une indication.). Une méthode alternative est d'effectuer une intégration par parties pour dériver le logarithme, mais les calculs sont épouvantables.

$t \mapsto u = \frac{1}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, et $dt = \frac{-du}{u^2}$; donc

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \ln t}{1+t^3} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln u}{\sqrt{u} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^3} \left(\frac{-du}{u^2}\right) = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u \sqrt{u}}{(1+u)^3} du = -K \text{ donc } K = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \ln t}{1+t^3} dt = 0.$$

4 — Nature de $\int_0^1 \sin \frac{1}{t} dt$.

$t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ est continue sur $]0; 1]$, et change de signe une infinité de fois sur tout voisinage de 0.

Pour étudier la nature de cette intégrale, effectuons un changement de variable $u = \frac{1}{t}$, $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant de $]0; 1]$ dans $[1; +\infty[$: $dt = \frac{-du}{u^2}$, donc $\int_0^1 \sin \frac{1}{t} dt$ a la même nature (et la même valeur)

$$\text{que } \int_{+\infty}^1 \sin u \left(\frac{-du}{u^2} \right) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u^2} \right) du.$$

Mais $u \mapsto \frac{\sin u}{u^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et

$$\frac{\sin u}{u^2} = \mathcal{O}_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u^2} \right).$$

L'intégrabilité de $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ sur $[1; +\infty[$ entraîne

donc celle de $u \mapsto \frac{\sin u}{u^2}$ sur cet intervalle, donc

la convergence de $\int_0^1 \sin \frac{1}{t} dt$.

