CHAPITRE 8 INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES 2024/2025

Dans ce chapitre, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

1 — Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$

Définition et propriété : primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$, $b \geqslant a$.
Alors, il existe une fonction F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
F est appelée ***une primitive de*** f sur I.
Toutes les primitives de f diffèrent d'une constante.

Définition et propriété : lien entre primitive et intégrale

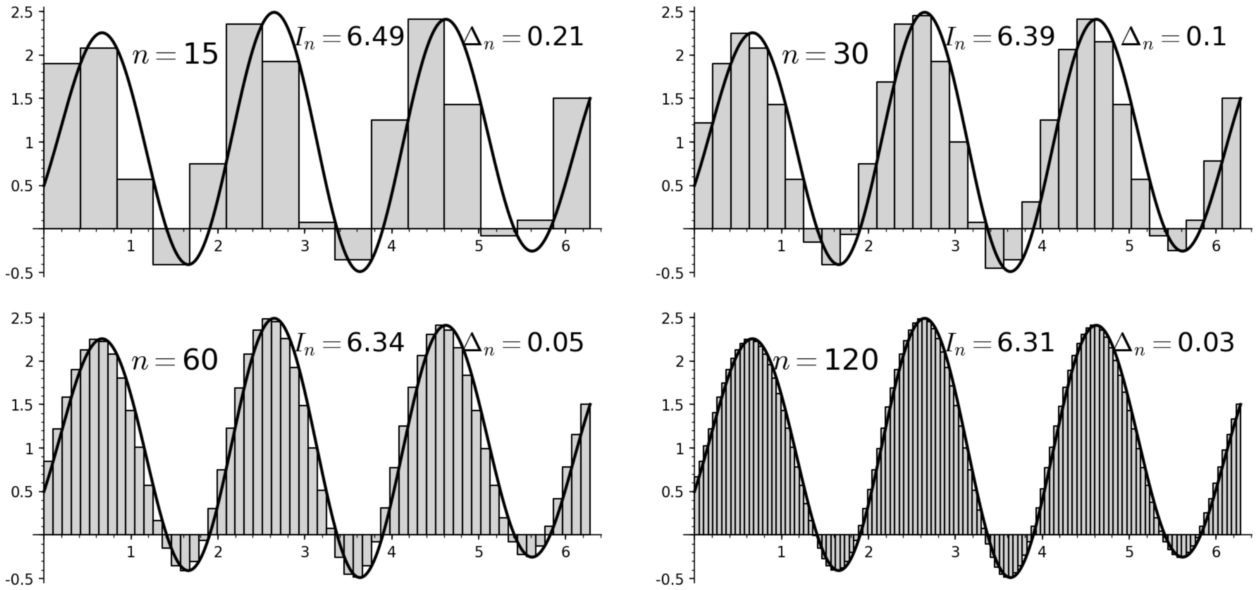
Avec les hypothèses ci-dessus, soit $c \in I$, il existe une unique primitive F de f qui s'annule en c :

$$\begin{cases} F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I, \quad F'(x) = f(x) \\ F(c) = 0 \end{cases} \iff \forall x \in I, \quad F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$$

Ceci définit ***l'intégrale entre*** c ***et*** x ***de la fonction*** f continue sur I.

Construction de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment :

on démontre qu'il existe une suite de fonctions en escalier qui « converge » vers f, et on définit $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$. En pratique $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$



Propriété 1 : linéarité de l'intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur $I = [a, b]$, et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$; alors $\lambda f + \mu g$ est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Propriété 2 : positivité de l'intégration

Si $b > a$, alors $$(\forall x \in [a, b], f(x) \geqslant 0) \Longrightarrow \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0\right)$$

Propriété 3 : intégrale nulle

Si $b > a$, et f continue sur $[a, b]$, alors $$\begin{cases} \forall x \in [a, b], f(x) \geqslant 0 \\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \Longrightarrow (\forall x \in [a, b], f(x) = 0)$$

Propriété 4 : relation de Chasles

soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$, alors
$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$$

En conséquence, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Propriété 5 : changement de variable

Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$, et f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi([\alpha, \beta])$, alors
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 1

Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\mathrm{d}t$, on fait le changement de variable $u = \cos t = \varphi(t)$. Ce changement est strictement décroissant sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, et $\mathrm{d}u = -\sin t\mathrm{d}t$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t\mathrm{d}t = \int_1^0 (1-u^2)(-\mathrm{d}u) = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

☞ Bien que cos ne soit pas injectif sur $\mathbb{R}$, ce changement peut être appliqué à l'intégrale $\int_0^x \sin^3 t\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 6 : intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 2

- Calcul d'une primitive du logarithme :
  Posons en vue d'une intégration par parties $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln t \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$.
  Si $x > 0$, alors $\int_1^x \ln t\mathrm{d}t = [t\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t}\mathrm{d}t = x\ln x - x + 1$.
  Une primitive du logarithme est $x \mapsto x\ln x - x + 1$.
  On obtient de manière analogue (à faire à titre d'exercice) :
  Une primitive de l'arc tangente est $x \mapsto x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
  Posons en vue d'une intégration par parties $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$. Alors
  $I_1 = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$;
  $I_1 = \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right) = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2$ soit $2I_2 = \frac{x}{1+x^2} + I_1$.
  donc $I_2 = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x}$

2 — Intégrale généralisée d'une fonction continue

2.1 – Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Définition : intégrale convergente

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ continue sur $[a, b[$,
On dit que ***l'intégrale*** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ***convergente*** lorsque $\displaystyle\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.
Dans le cas contraire, on dit que « $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est divergente ».

Exemple 3

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$: Si $a > 0$, alors $\displaystyle\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\arctan t]_0^a = \arctan a - 0$ donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$.
  $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ **converge et vaut** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$**.**
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-t}\mathrm{d}t$ **:** $t \mapsto 2^{-t} = \mathrm{e}^{-\ln 2t}$ a pour primitive $\dfrac{-1}{\ln 2}\mathrm{e}^{-\ln 2t} = \dfrac{-2^{-t}}{\ln 2}$ donc
  $\displaystyle\int_0^{a} 2^{-t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-2^{-t}}{\ln 2}\right]_0^a = \frac{1-2^{-a}}{\ln 2}$ donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} 2^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln 2}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-t}\mathrm{d}t$ **converge et vaut** $\boldsymbol{\dfrac{1}{\ln 2}}$**.**

Propriété 7 : comparaison série/intégrale (complément)

Soit f une fonction décroissante et continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles positives, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ a la même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 8 : convergence des intégrales de fonctions positives

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et **à valeurs positives**,
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Propriété 9 : comparaison sur un intervalle $[a, +\infty[$

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f et g deux fonctions continues *et positives* sur $I = [a, +\infty[$:
- $\boxed{\leqslant}$ si $f \leqslant g$, et que $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- $\boxed{\sim}$: si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.

2.2 – Intégrales généralisées sur $[a, b[$

Ici b représente un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et a un réel strictement inférieur à b.

Définition : intégrale convergente

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ continue sur $[a, b[$,
alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\mathrm{d}t$ est dite ***convergente*** lorsque $\displaystyle\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers b.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^{b} f$ cette limite.
Dans le cas contraire, on dit que « $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\mathrm{d}t$ est divergente ».

☞ ***Remarques :***
- Une intégrale est soit convergente, soit divergente. Ceci constitue sa ***nature***.
- Si $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge, ce symbole désigne à la fois une limite et la valeur de cette limite, et peut être utilisée dans un calcul, avec toutes les restrictions propres aux calculs sur les limites.
- Si $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\mathrm{d}t$ diverge, il ne faut pas tenter d'attribuer une valeur à ce symbole, ni de l'utiliser dans un calcul.
- Si f est continue sur $[a, b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \mathrm{d}t$ est « naturellement » convergente. On peut parler dans ce cas *d'intégrale ordinaire* ou *intégrale de Riemann*.

Exemple 4

$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{t}$:
Si $a<0$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{a}\frac{\mathrm{d}t}{t}=[\ln|t|]_{-1}^{a}=-\ln a$ donc $\displaystyle\lim_{a\to 0_-}\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}t}{t}=+\infty$. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ **diverge.**

2.3 – Théorèmes de comparaison

Propriété 10 : comparaison sur un intervalle $[a,b[$

Soit $a\in\mathbb{R}$, et f et g deux fonctions continues *et positives* sur $I=[a,b[$:

- $\boxed{\leqslant}$ si $f\leqslant g$, et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- $\boxed{\sim}$: si $f(x)\underset{x\to b}{\sim}g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.

☞ ***Remarques :***

- ⚠ Il ne faut pas oublier de vérifier l'hypothèse de positivité.
- Si on ne connaît pas *a priori* la nature de $\displaystyle\int_a^b f$, la comparaison par $\sim$ est la plus facile à mettre en place, à condition de savoir manipuler les équivalents.
- Si $0\leqslant f\leqslant g$, et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.
- Si $0\leqslant f=o_b(g)$ ou $0\leqslant f=\mathcal{O}_b(g)$, et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors il existe $c\in[a,b[$ tel que $x\in[c,b[\Longrightarrow f(x)\leqslant g(x)$, d'où la convergence de $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$, puis de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ (*cf* la propriété 10 d'indifférence de la borne inférieure).

2.4 – Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

- Lorsque f est continue sur l'intervalle *semi-ouvert* $]a,b]$, on définit l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ de manière analogue ;
- Lorsque f est continue sur l'intervalle *ouvert* $]a,b[$, on définit l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ en posant, c étant un réel quelconque de $]a,b[$:
  $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ si **les deux intégrales** $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ **convergent**.

⚠ Si au moins une des deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, on considère que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple 5

- $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$: si $a>0$, alors $\displaystyle\int_a^1 \ln t\,\mathrm{d}t=-a\ln a+a-1$ d'après l'exemple 1, donc $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^1 \ln t\,\mathrm{d}t=-1$.
  $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ **converge et vaut -1.**
- $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$: si $a\in[0,1[$, alors $\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=[\arcsin t]_0^a=\arcsin a$ donc $\displaystyle\lim_{a\to 1_-}\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$.
  $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ **converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.**
- $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$: par un calcul analogue au précédent, $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$, donc par additivité :
  $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ **converge et vaut π.**
- $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge comme somme de deux intégrales divergentes, bien que $\displaystyle\int_{-1}^{-a}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=0$ pour tout $a\in]0,1]$.

2.5 – Intégrales de référence

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: ➤ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

➤ $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ converge ; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Extension du théorème de comparaison à un intervalle quelconque :

- ➤ $]a,b]$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On raisonne par « symétrie ».
- ➤ $]a,b[$: soit c un élément quelconque de $]a,b[$, alors

  $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ converge **et** $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

Cette additivité (liée à la relation de Chasles) a pour conséquence la propriété suivante :

Propriété 11 : indifférence de la borne inférieure

Si f est continue sur $[a,c]$, $a < c < b$, alors $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.

2.6 – Extension des propriétés aux intégrales généralisées

Propriété 12 : linéarité de l'intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur I, telles que $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent, et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$; alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

⚠ *à condition que deux au moins des trois termes de cette égalité convergent*

⚠ Ne pas utiliser cette propriété pour scinder une intégrale convergente en somme de deux intégrales divergentes, par exemple en écrivant :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{1+t^3} - \sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \sqrt{t^3}\mathrm{d}t$ (ces deux dernières intégrales divergent)

Propriété 13 : positivité de l'intégration

Si $b > a$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors

$$(\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant 0) \Longrightarrow \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0\right)$$

Propriété 14 : intégrale nulle

Si $b > a$, que f est positive et continue sur $]a,b[$, et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\right) \Longrightarrow (\forall t \in]a,b[, f(t) = 0)$$

Propriété 15 : relation de Chasles (intégrales généralisées)

soit f une fonction continue sur l'intervalle $]\min(a,b,c), \max(a,b,c)[$, alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

⚠ *à condition que les deux intégrales* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_b^c f(t)\mathrm{d}t$ *convergent*

Propriété 16 : changement de variable (intégrales généralisées)

Soit $\varphi :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]\alpha,\beta[$, et f une fonction continue sur l'intervalle $]\varphi(\alpha),\varphi(\beta)[=]a,b[$, alors

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et, dans ce cas, elles sont égales.

⚠ Si φ est strictement *décroissante* et non croissante, alors $]\varphi(\alpha),\varphi(\beta)[\, = \,]a,b[$ signifie $\varphi(\alpha) = b$ et $\varphi(\beta) = a$.

Exemple 6

- Dans $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, on pose $u=t^2$, soit $t=\varphi(u)=\sqrt{u}$.

  Alors φ est strictement croissante et $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{2}$.

  La deuxième intégrale étant réputée convergente (et de valeur $\frac{1}{2}$), la première l'est également, et sa valeur est identique. Néanmoins, il vaut mieux montrer *a priori* la convergence de $\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$: on verra ceci plus bas.

- On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}$ qui est convergente, puisque $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ 0\leqslant\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}\leqslant\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et que la primitive de $t\mapsto\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}$ qui s'annule en 0 est donc majorée par $\arctan t$, et donc par $\frac{\pi}{2}$. La convergence résulte de la propriété 8.

  Posons alors $t=u\sqrt{3}$, c'est-à-dire $u=\frac{t}{\sqrt{3}}$ et $\mathrm{d}t=\sqrt{3}\mathrm{d}u$: on définit ainsi clairement une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{3}\mathrm{d}u}{3+3u^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$.

- Dans $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$, on pose $t=\tan\frac{x}{2}$, c'est-à-dire $x=\varphi(t)=2\arctan(t)$.

  Alors φ est strictement croissante et $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, $\mathrm{d}x=2\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et on montre que

  $\cos x=\cos(2\arctan(t))=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, donc $2+\cos x=2+\cos(2\arctan(t))=\frac{3+t^2}{1+t^2}$

  $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{3+t^2}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{3+t^2}$. Les deux intégrales sont convergentes et de même valeur $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

- Dans $I_4=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$, on pose $u=\frac{1}{t}$, définissant ainsi un changement de variable strictement décroissant et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.

  Comme $0\leqslant\frac{1}{1+t^4}\leqslant\frac{1}{1+t^2}$, on justifie la convergence de I_4 de la même manière que plus haut.

  $I_4=\int_{+\infty}^0\frac{1}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{-\mathrm{d}u}{u^2}=\int_{+\infty}^0\frac{-u^2\mathrm{d}u}{u^4+1}=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

Propriété 17 : intégration par parties (intégrales généralisées)

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$.
On suppose que $\lim\limits_{t\to a_+}u(t)v(t)$ et $\lim\limits_{t\to b_-}u(t)v(t)$ existent et sont finies, et on pose :

$$[u(t)v(t)]_a^b=\lim_{t\to b_-}u(t)v(t)-\lim_{t\to a_+}u(t)v(t).$$

Alors les intégrales généralisées $\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ ont même nature, et si elles convergent :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 7

Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère l'intégrale généralisée $I_n=\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que I_n converge et vaut $n!$.

- I_0 converge et vaut $\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}=1-0=1=0!$.
- Supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et montrons-la au rang $n\geqslant 1$.

  Posons en vue d'une intégration par parties $\begin{cases}u'(t)=\mathrm{e}^{-t}\\ v(t)=t^n\end{cases}$; $\begin{cases}u(t)=-\mathrm{e}^{-t}\\ v'(t)=nt^{n-1}\end{cases}$.

  $u(t)v(t)=-t^n\mathrm{e}^{-t}$: $\lim\limits_{t\to 0_+}u(t)v(t)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ (croissances comparées).

Le crochet $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}$ converge et vaut 0, donc puisque I_{n-1} converge, I_n converge et $I_n = nI_{n-1} = n(n-1)! = n!$.

Exemple 8

Soit l'intégrale généralisée $S = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$. La fonction *sinus cardinal* $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0, ce qui garantit la convergence de $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons en vue d'une intégration par parties $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$; $\begin{cases} u(t) = 1-\cos t \\ v'(t) = \frac{-1}{t^2} \end{cases}$.

$uv(t) = \frac{1-\cos t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0, et de limite nulle en $+\infty$, donc $[uv]_0^{+\infty} = 0$.

uv' est prolongeable par continuité en 0, et $0 \leqslant -uv'(t) = \frac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2}$, ce qui garantit l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} uv'(t)\mathrm{d}t$. On peut alors écrire (preuve de la nature et de la valeur) :

$S = \int_0^{+\infty} u'v(t)\mathrm{d}t = [uv]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} -uv'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$

3 — Intégrales absolument convergentes, intégrabilité d'une fonction

3.1 – Définitions

Définition : intégrale absolument convergente

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ à valeurs réelles ou complexes, on dit que ***l'intégrale*** $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ***est absolument convergente*** lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

Propriété 18

Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, et *(inégalité triangulaire)* :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, la convergence absolue implique la convergence.

Définition : fonction intégrable sur un intervalle

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue sur un intervalle I de borne inférieure a et de borne supérieure b.

f est dite ***intégrable sur*** I si, et seulement si, l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

L'intégrale sur I de f peut être notée $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ ou $\int_I f$.

☞ ***Remarques :***
- ➤ $|f|$ désigne le module de f, mais si f est à valeurs réelles, il s'agit de la valeur absolue de f.
- ➤ L'intégrabilité de f sur I est équivalente à celle de f sur l'intérieur de I, c'est-à-dire $]a,b[$.

Propriété 19 : intégrabilité et intégrales convergentes

Si f est intégrable sur I, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, et

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

Exemple 9

La fonction $f : t \mapsto \exp\left(\left(-\frac{1}{2}+3i\right)t\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car $|f(t)| = \mathrm{e}^{-t/2}$ donc $\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 10

En étudiant la série de terme général positif $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t$, on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} \mathrm{d}t$ diverge ; donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge (voir l'exemple 9 plus bas), mais $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Propriété 20 : espace vectoriel de fonctions continues et intégrables

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes (a, b) avec $a < b$, alors l'ensemble des fonctions [continues et] intégrables sur I est un espace vectoriel, noté $\mathscr{L}^1(I, \mathbb{K})$.

Propriété 21 : intégrale nulle (bis)

Si f est continue, positive et intégrable sur I, et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

3.2 – Théorèmes de comparaison

Propriété 22 : comparaison sur un intervalle $[a, b[$

Soit $a \in \mathbb{R}$, et f et g deux fonctions continues sur $I = [a, b[$:

- $\boxed{\leqslant}$ si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur I.
- $\boxed{\mathcal{O}}$: si $f(x) = \mathcal{O}_{x \to b}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur I.
- $\boxed{o}$: si $f(x) = o_{x \to b}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur I.
- $\boxed{\sim}$: si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur I.

Exemple 11

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b[$ pour $b \in \mathbb{R}$, $b > a$ si, et, seulement si, $\alpha < 1$.

Exemple 12

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Elle est de plus intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\forall t \in [1, +\infty[$, $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge *ie* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exemple 13

La fonction $t \mapsto \exp(-t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est de plus intégrable sur $\mathbb{R}_+$...même si sa primitive ne peut pas être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires !
En effet : $\forall t \in [1, +\infty[$, $\exp(-t^2) \leqslant \exp(-t)$, donc $\exp(-t^2) = \mathcal{O}_{x \to \infty}(\mathrm{e}^{-t})$, et $t \mapsto \exp(-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 14

Soit $h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, alors h est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h(t) = \frac{\sqrt{t+1} - \sqrt{t}}{\sqrt{t}\sqrt{t+1}} = \frac{t+1-t}{\sqrt{t}\sqrt{t+1}\left(\sqrt{t+1} + \sqrt{t}\right)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2t^{3/2}}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge, h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exemple 15

Les fonctions $t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ sont continues sur $[1, +\infty[$.
Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{t^\alpha \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t/2}} = t^\alpha \mathrm{e}^{-t/2}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, donc $t^\alpha \mathrm{e}^{-t} = \mathcal{O}\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$.
Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ l'est également.

Exemple 16

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sont continues sur $[1, +\infty[$.
Comme $\frac{1}{t} = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)$ et que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exemple 17

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ sont continues sur $]0, 1]$.
Comme $\frac{1}{t} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{\sin t}$ et que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$, $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

Propriété 23 : intégrabilité sur une réunion d'intervalles

soit c un élément quelconque de $]a,b[$, alors f est intégrable sur $]a,b[$ si, et seulement si elle l'est sur $]a,c[$ **et** sur $]c,b[$.

Exemple 18

$g: t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t-t^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$.

$g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, donc g est intégrable sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$.

$g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1+t)}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \underset{t\to 1_-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right[$, donc g est intégrable sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right[$.

Finalement, g est intégrable sur $]0,1[$.

Exemple 19

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $g_\alpha : t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$.

Alors g_α est continue sur $]0,1]$, et $g_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^\alpha$. D'après les intégrales de référence, $t \mapsto t^\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $\alpha > -1$, donc g_α est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si, $\alpha > -1$.

Comme g_α est intégrable sur $[1,+\infty[$ comme démontré plus haut, on en conclut que

$g_\alpha : t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\alpha > -1$.

4 — Intégration terme à terme

Théorème 8.1 d'intégration terme à terme

$\sum\limits_{n\geqslant 0} \leftrightarrows \int$

Soit I un intervalle quelconque, et $S : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe des fonctions f_n intégrables sur I telles que $\forall t \in I, S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

Si la série $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors S est intégrable sur I et :

$$\int_I S(t)\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 20

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et les fonctions $f_n(t)$ définies par $f_n(t) = t^{na}\ln t$ pour tout $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{na} = \dfrac{1}{1-t^a}$ (série géométrique), $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = S(t) = \dfrac{\ln t}{1-t^a}$ pour tout $t \in]0,1[$.
- $f_0 : t \mapsto \ln t$ est réputée intégrable sur $]0,1]$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t) = 0$ donc f_n est continue sur $[0,1]$, et une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.
- Posons en vue d'une intégration par parties : $\begin{cases} u'(t) = t^{na} \\ u(t) = \dfrac{t^{na+1}}{na+1}\end{cases}$; $\begin{cases} v(t) = \ln t \\ v'(t) = \dfrac{1}{t}\end{cases}$.

  Alors $u\,v(t) = \dfrac{t^{na+1}\ln t}{na+1}$ donc $\lim\limits_{t\to 0_+} u\,v(t) = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to 1_-} u\,v(t) = 0$; ceci garantit la convergence du crochet $[u\,v]_0^1$ et sa valeur 0. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0 - \int_0^1 \frac{t^{na}}{na+1}\mathrm{d}t = \frac{-1}{(na+1)^2}$

  Comme f_n est négative sur $I =]0,1[$, $\displaystyle\int_I |f_n| = \frac{1}{(na+1)^2}$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{(na+1)^2}$ converge par comparaison ($\mathcal{O}$) avec la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$.

Finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^a}\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(na+1)^2}$.