CHAPITRE 7 SÉRIES ENTIÈRES (EXEMPLES) **2024/2025**

1 — Rayon de convergence et somme d'une série entière.

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n}x^n$.

1.1 – Rayon de convergence

Avec le critère de d'Alembert :
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, posons $u_n = \frac{\operatorname{ch}(n)}{n}x^n$; alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\operatorname{ch}(n)}{n}\frac{n+1}{\operatorname{ch}(n+1)}x$.
Comme $\operatorname{ch}(n) = \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} \sim \frac{\mathrm{e}^n}{2}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \mathrm{e}x$ donc,

* si $|x| < \mathrm{e}^{-1}$, alors $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \mathrm{e}x < 1$ donc $\sum u_n$ converge absolument ; on en déduit que $R \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
* si $|x| > \mathrm{e}^{-1}$, alors $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \mathrm{e}x > 1$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement ; on en déduit que $R \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

finalement $\boldsymbol{R = \mathrm{e}^{-1}}$.
Avec les sommes de séries entières :
$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n}x^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{ch}(n)x^n$, qui est la demi-somme des séries géométriques $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^n x^n = \sum_{n\geqslant 1} (\mathrm{e}x)^n$, et $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-n}x^n = \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n$, de rayons de convergence respectifs $R_1 = \mathrm{e}^{-1}$ et $R_2 = \mathrm{e}$.
Comme $R_1 < R_2$, le rayon de convergence de la somme est $R_1 = \mathrm{e}^{-1}$.

1.2 – Somme de la série

Pour $x \in I = \left]\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right[$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(n)}{n}x^n$. Alors f est $\mathscr{C}^1$ sur I, et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{ch}(n)x^{n-1} = \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})x^n\right) = \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(x\mathrm{e})^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(x\mathrm{e}^{-1})^n\right) = \frac{1}{2x}\left(\frac{\mathrm{e}x}{1-\mathrm{e}x} + \frac{x\mathrm{e}^{-1}}{1-x\mathrm{e}^{-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}x} + \frac{1}{\mathrm{e}-x}\right).$$

Après réduction au même dénominateur, on trouve $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^2 + 1 - 2\mathrm{e}x}{2(\mathrm{e}x^2 - (\mathrm{e}^2+1)x + \mathrm{e})}$
Avec $u(x) = \mathrm{e}x^2 - (\mathrm{e}^2+1)x + \mathrm{e}$, $u'(x) = 2\mathrm{e}x - (\mathrm{e}^2+1)$; ainsi $f'(x)$ est de la forme $\frac{-u'}{2u}$, qui est la dérivée de $\frac{-1}{2}\ln u$.
De plus, $f(0) = 0$. En tenant compte de la constante d'intégration, on trouve $\boldsymbol{f(x) = \frac{-1}{2}\ln\left(\mathrm{e}x^2 - (\mathrm{e}^2+1)x + \mathrm{e}\right)}$.

2 — Développement en série entière

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
On rappelle que $\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, avec un rayon de convergence infini.
Alors $\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$, toujours avec un rayon de convergence infini ; par intégration terme à terme :
$\boldsymbol{F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}}$ **pour tout** $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$.

3 — Calcul d'une somme aux bornes de l'intervalle de convergence

On considère les deux séries entières, de rayon de convergence égal à 1 :
$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, de sommes respectives $\ln(1+x)$ et $\arctan x$.
D'après le théorème des séries alternées, ces séries convergent lorsque $x = 1$; si $x = -1$, la première diverge, et la seconde converge.
On en déduit que $\lambda : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ est définie sur $]-1;1]$, et que $\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est définie sur $[-1,1]$.
D'après le cours, ceci implique que λ est continue sur $]-1,1]$ et α sur $[-1,1]$, et alors :
$\lim_{x\to 1_-} \lambda(x) = \lambda(1)$; or $\lim_{x\to 1_-} \lambda(x) = \lim_{x\to 1_-} \ln(1+x) = \ln 2$. On en déduit que $\boldsymbol{\lambda(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$.

On obtient de manière analogue la continuité de α en 1_-, et sa coïncidence avec arctan sur $[-1,1]$, et alors
$A(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$; $\boldsymbol{\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right)}$

4 — Résolution d'une équation différentielle

On cherche les solutions développables en série entières de l'équation $\left(x^2+1\right)y''+2\,x\,y'-2\,y=0$.

Posons $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ (avec un rayon de convergence $R>0$), alors

$x^2\,y''=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n$;

$y''=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n=\sum_{n=2}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}nx^n$;

$2\,x\,y'=\sum_{n=1}^{+\infty}2n\,a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}2n\,a_nx^n$

$-2\,y=\sum_{n=0}^{+\infty}-2\,a_nx^n$ donc par addition :

$\left(x^2+1\right)y''+2\,x\,y'-2\,y=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n(n-1)+2n-2)\,a_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-1)(n+2)a_n\right)x^n$

Cette série entière coïncide avec zéro si, et seulement si, $(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-1)(n+2)a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire $a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+1}a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On remarque qu'en particulier $a_3=0$ (avec $n=1$) et donc $a_{2k+1}=0$ pour $k\geqslant 1$ (par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$).

Si on pose $a_0=0$, de même, tous les coefficients pairs de la série entière non nuls, et donc $f(x)=a_1\,x$. Ceci fournit une solution polynomiale impaire de l'équation : $u(x)=x$.

Si on pose $a_0=1$ et $a_1=0$, on trouve en posant $n=2k$ dans la relation de récurrence $a_{2k+2}=-\frac{2k-1}{2k+1}a_{2k}$, donc $a_{2k}\neq 0$ par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, et $-\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=-\frac{2k-1}{2k+1}\to -1$ donc le critère de d'Alembert donne un rayon de convergence égal à 1.

Par ailleurs :
$\prod_{k=0}^{n}\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=\prod_{k=0}^{n}-\frac{2k-1}{2k+1}$, soit par télescopage pour $n\in\mathbb{N}$: $\frac{a_{2n+2}}{a_0}=(-1)^n\frac{-1}{2n+1}$. Alots $a_{2n+2}=\frac{(-1)^n}{2n+1}$, ce qui donne
$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=1+x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ donc $f(x)=1+x\arctan x$ pour $x\in]-1;1[$.

Les solutions développables en série entière sont de la forme $\boldsymbol{x\mapsto\alpha\,x+\beta\,(1+x\arctan x)}$.