CHAPITRE 7 SÉRIES ENTIÈRES 2024/2025

Dans ce chapitre, on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels ou complexes.

Pour $z\in\mathbb{C}$ fixé, on pose sous réserve de convergence $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

*On définit ainsi une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ notée $\sum a_n z^n$, appelée **série entière** de coefficients (a_n).*

☞ ***Remarques :***

- Si $z=0$, $a_0 z^0 = a_0$ et $a_n z^n = 0$ si $n\geqslant 1$. La somme de la série est définie au moins en $z=0$, où elle vaut a_0.
- Tout polynôme est un cas particulier de série entière (avec une suite de coefficients stationnaire en 0).
- Nous avons déjà rencontré deux séries entières :
  - $\sum z^n$, avec $a_n=1$ (suite constante), de somme $\dfrac{1}{1-z}$ si $|z|<1$;
  - $\sum \dfrac{z^n}{n!}$, avec $(a_n)_{n\geqslant 0}=\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$, de somme $\exp z$ pour tout $z\in\mathbb{R}$.

1 — Rayon de convergence

1.1 – Définitions

Propriété 1 : *lemme* d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes, de la variable z, et $z_0\in\mathbb{C}^*$.
Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<|z_0|$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition et propriété : rayon de convergence d'une série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière à coefficients complexes, de la variable z.
On considère l'ensemble $\mathscr{B}=\{\rho\in\mathbb{R}_+,\ \text{la suite } (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$.
Alors $\mathscr{B}$ est un intervalle (non vide) de $\mathbb{R}_+$, de borne inférieure 0 ;
sa borne supérieure $R\in\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ est appelée ***rayon de convergence*** de la série entière $\sum a_n z^n$.

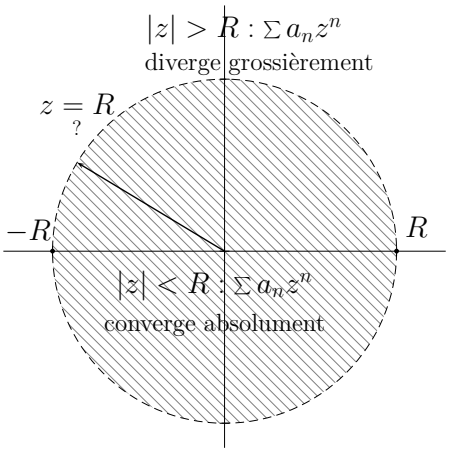
Propriété 2 : rayon de convergence et domaine de convergence

- Pour $|z|<R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Pour $|z|>R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

Conséquence concernant l'ensemble $\mathfrak{C}(a_n)$ de convergence de la série $\sum a_n z^n$

Soit R le rayon de convergence de la série, $\mathscr{D}_R=\{z\in\mathbb{C},|z|<R\}$ le disque **ouvert** de rayon R, et $\overline{\mathscr{D}}_R=\{z\in\mathbb{C},|z|\leqslant R\}$ le disque **fermé** de rayon R.

- Si $R=0$, alors $\sum a_n z^n$ ne converge que si $z=0$: $\mathfrak{C}(a_n)=\{0\}$.
  $\mathscr{D}_0=\emptyset$ et $\overline{\mathscr{D}}_0=\{0\}$.
- Si $R\in\mathbb{R}_+^*$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z|<R$, et diverge grossièrement si $|z|>R$; le comportement de $\sum a_n z^n$ sur le cercle $|z|=R$ (appelé ***cercle d'incertitude***) est imprévisible.
  (voir la figure ci-contre).
  Autrement dit, $\mathfrak{C}(a_n)$ a la forme d'un disque, appelé ***disque de convergence*** :
  $$\mathscr{D}_R\subset\mathfrak{C}(a_n)\subset\overline{\mathscr{D}}_R.$$
- Si $R=+\infty$, alors $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z\in\mathbb{C}$:
  $\mathfrak{C}(a_n)=\mathbb{C}=\mathscr{D}_\infty$.



1.2 – Calcul du rayon de convergence

Propriété 3 : majorations et minorations de R

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0\in\mathbb{C}$, alors
- $|a_n z_0^n|\to+\infty \Longrightarrow (a_n z_0^n)$ non bornée $\Longrightarrow \sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement $\Longrightarrow R\leqslant|z_0|$
- $\sum a_n z_0^n$ converge $\Longrightarrow \lim(a_n z_0^n)=0 \Longrightarrow (a_n z_0^n)$ est bornée $\Longrightarrow R\geqslant|z_0|$

Notation : conformément au programme, on notera au besoin $R\left(\sum a_n z^n\right)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemple 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite stationnaire en zéro, c'est-à-dire que $n \geqslant p \Longrightarrow a_n = 0$. Alors la série $\sum a_n z^n$ est un polynôme. Il est clair que $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc son rayon de convergence est infini.

Exemple 2

Soit $a_n = \alpha^n$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors $\sum \alpha^n z^n = \sum (\alpha z)^n$ donc $\sum \alpha^n z^n$ converge si, et seulement si, $|\alpha z| < 1$. Alors $R = \dfrac{1}{|\alpha|}$.

Exemple 3

On considère $\theta \in \mathbb{R}$, et la série entière $\sum \cos(n\theta) z^n$, dont on recherche le rayon de convergence R.
On admet que $(\cos(n\theta))$ ne tend pas vers 0.

- Si $z_0 = 1$, alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement donc $R \leqslant 1$.
- Si $|z_0| < 1$, alors $\left|\cos(n\theta) z^n\right| \leqslant |z|^n$ donc $\sum \cos(n\theta) z^n$ converge ; $\forall z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| < 1, R \geqslant |z_0|$. Donc $R \geqslant 1$.

Finalement $R = 1$.

Propriété 4 : comparaisons des termes et conséquences sur le rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b :

- si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$;
- si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Exemple 4

- Comme $\dfrac{3n+2}{n+1} = \mathcal{O}(1)$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{3n+2}{n+1} z^n$ est supérieur à 1, par comparaison avec celui de $\sum z^n$.
- Le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(2^n + n(-1)^n\right) z^n$ est égal à $\dfrac{1}{2}$, par comparaison avec celui de $\sum 2^n z^n$: $2^n + n(-1)^n \sim 2^n$.

Propriété 5 : rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n x^n$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence, soit $R\left(\sum n^\alpha a_n z^n\right) = R\left(\sum a_n z^n\right)$

Exemple 5

Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, rapport de deux polynômes P et Q, le polynôme Q n'ayant aucune racine dans $\mathbb{N}$; par exemple, $F_1(n) = \dfrac{3n^3 + n^2 - 1}{n^4 + n^2 + 1}$.
Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $\sum n^k z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum z^n$, c'est-à-dire 1.
De plus, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$, et plus généralement $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^k}$ ont le même rayon de convergence que $\sum z^n$, *ie* toujours 1.
$F(n) \sim \alpha n^m$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$: dans l'exemple choisi, $F_1(n) \sim 3.n^{-1}$.
Par utilisation de la propriété 4, on en tire que **le rayon de convergence de la série entière $\sum F(n) z^n$ vaut 1.**

Propriété 6 : calcul du rayon de convergence à l'aide du critère de d'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence, et $z \in \mathbb{C}^*$, et $u_n = a_n z^n$.
On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell|z|$, $\ell \in \mathbb{R}_+$.
Alors $\sum u_n = \sum a_n z^n$ converge absolument si $\ell|z| < 1$ et diverge grossièrement si $\ell|z| > 1$, donc
$R = \dfrac{1}{\ell}$ si $\ell > 0$; $R = \infty$ si $\ell = 0$, et $R = 0$ si $\ell = +\infty$.

Exemple 6

Le rayon de convergence de $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est infini, celui de $\sum n!z^n$ est nul.

Exemple 7

Soit la série entière $\sum e^{\frac{in\pi}{3}} 2^n \sqrt{n^5+1} z^n$, on pose $a_n = e^{\frac{in\pi}{3}} 2^n \sqrt{n^5+1}$.

$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{2^{n+1}\sqrt{(n+1)^5+1}}{2^n\sqrt{n^5+1}} \to \ell = 2$ quand n tend vers $+\infty$. **Finalement $R = \dfrac{1}{2}$.**

Exemple 8

Soit la série entière $\sum \binom{2n}{n} e^{-n} z^{2n+1}$, on pose $a_n = \binom{2n}{n} 4^n$ et $u_n = a_n z^{2n+1}$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé.

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z^2| = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2 e^{-n-1}}{(2n)!((n+1)!)^2 e^{-n}} |z|^2 = \dfrac{(2n+2)(2n+1)e^{-1}}{(n+1)^2} |z|^2 \to 4e^{-1}|z|^2$ quand n tend vers $+\infty$.

Il en résulte que $\sum u_n$ converge absolument si $|z|^2 < \dfrac{e}{4}$ $\left(R \geqslant \dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)$ et diverge grossièrement si $|z|^2 > \dfrac{e}{4}$ $\left(R \leqslant \dfrac{\sqrt{e}}{2}\right)$.

Finalement $R = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

☞ Dans ce cas, il vaut mieux éviter de faire appel à la limite de $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, qui n'existe pas, car $a_{2n} = 0$.

De manière générale, l'usage de cette limite sans précaution est déconseillé pour une série entière ***lacunaire***, c'est-à-dire dont une infinité de coefficients s'annulent.

1.3 – Opérations algébriques

Propriété 7 : rayon de convergence, et somme de la somme de deux séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et R_{a+b} le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Alors $\left.\begin{array}{lll} \text{si} & R_a < R_b, & R_{a+b} = R_a; \\ \text{si} & R_a = R_b, & R_{a+b} \geqslant R_a. \end{array}\right\}$ Dans tous les cas, $\boxed{R_{a+b} \geqslant \inf(R_a, R_b)}$.

De plus, pour $|z| < R_{a+b}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Exemple 9

On considère les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(1 + \frac{1}{n!}\right) z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) z^n$, de rayon de convergence 1.

Leur somme, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2z^n$ a pour rayon de convergence 1, et leur différence, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n!} z^n$, a un rayon de convergence infini.

Exemple 10

On considère les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n!} z^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n!} z^n$, de rayon de convergence infini. Leur somme,

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1+(-1)^n}{2n!} z^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2p)!} z^{2p}$ a un rayon de convergence infini, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} z^{2p} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, que l'on note $\mathrm{ch}(z)$.

Propriété 8 : rayon de convergence et somme d'un produit de Cauchy

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

On appelle R_c le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$, le ***produit de Cauchy*** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Alors $R_c \geqslant \inf(R_a, R_b)$. De plus, pour $|z| < R_c$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Exemple 11

Quel est le rayon de convergence (et la somme) de la série entière $\sum w_n x^n$, où $w_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$?

On constate que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, où $u_n = \frac{1}{n!}$ et $v_n = (-1)^n$, donc $\sum w_n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum v_n x^n$ (de rayon de convergence infini, de somme $\frac{1}{1+x}$) et $\sum u_n x^n$ (de rayon de convergence 1, de somme e^x).

Le rayon de convergence de $\sum w_n x^n$ est 1, et sa somme est $\frac{e^x}{1+x}$.

Méthode 1 de détermination du rayon de convergence

On considère une série entière $\sum a_n z^n$, et on pose $u_n(z) = a_n z^n$.

1 Si la série est le résultat d'un calcul, utiliser les propriétés liées au rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy, ou de la dérivée et de la primitive d'une série entière (voir plus bas).

2 Vérifier si $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|$ admet une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Si oui, appliquer le critère de d'Alembert, comme dans les exemples 6 et 7 ; sinon, passer à l'étape 3.

2a Si la série est paire ou impaire, il faut adapter cette méthode comme dans l'exemple 8.

2b Pour simplifier le calcul, on peut utiliser la comparaison des coefficients (propriété 4), comme dans les exemples 4 et 5.

3 En dernier ressort, utiliser la propriété 3 pour encadrer R, comme dans l'exemple 3.

2 — Régularité de la somme

On considère ici une série entière $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; l'intervalle ouvert de convergence est bien sûr $]-R, R[$. $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est la somme de cette série entière, considérée comme fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Propriété 9 : continuité de la somme

$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.
De plus, f est continue sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, **même si $\mathscr{D}_f$ n'est pas ouvert**.

⚠ f n'est pas forcément continue en R ; néanmoins, si $R < +\infty$ et que $f(R)$ converge, alors f est continue sur $]-R, R]$.

Exemple 12

Soit la série entière $\sum x^n$, de rayon de convergence égal à 1, et de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ pour $x \in]-1, 1[$.

Alors $\lim_{x \to 1_-} f(x) = \frac{1}{2}$ existe, mais $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n$ diverge, donc $f(1)$ n'existe pas comme somme de série ; ainsi $f(1) \neq \lim_{x \to 1_-} f(x)$, et f n'est pas continue en 1.

Exemple 13

Soit la série entière $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, de rayon de convergence $R = 1$.

On appelle $f(x)$ la somme de cette série : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$; pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \ln(1+x)$ *cf* prop. 17 : 1.2.

De plus, la série entière converge en 1 : $f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées.

Alors f est continue en 1_-, et $f(1) = \lim_{x \to 1_-} f(x)$ soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \mathbf{\ln 2}$.

Propriété 10 : dérivée de la somme

$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$, et sa dérivée est la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Autrement dit : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n x^n)$,
ce qu'on appelle « dérivation terme à terme » (On rappelle que $R\left(\sum n\, a_n\, x^n\right) = R\left(\sum a_n\, x^n\right)$).

Propriété 11 : caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et sa somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x)$ est la somme de la série dérivée d'ordre k :
$\sum_{n\geqslant k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{m\geqslant 0}(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)a_{m+k}x^m$,
de rayon de convergence R.

☞ ***Remarque :*** Il s'agit d'une dérivation « terme à terme » : en partant du schéma $\boxed{a_n x^n \to n a_n x^{n-1}}$, on arrive à $\sum_{n=0}^{+\infty}\boxed{a_n x^n} \to \sum_{n=0}^{+\infty}\boxed{n a_n x^{n-1}} \to \sum_{n=1}^{+\infty}\boxed{n a_n x^{n-1}}$ (la dernière étape $(n=0 \to n=1)$ évite d'écrire $0.a_0 x^{-1}$)

Exemple 14

On considère la série entière $\sum x^n$, de rayon de convergence égal à 1, et de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Par dérivation terme à terme, on obtient que $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ est de rayon de convergence égal à 1, et de somme $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

p dérivations successives donnent que $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(n+2)\cdots(n+p)x^n$ est de rayon de convergence égal à 1, et de somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\cdots(n+p)x^n = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

Propriété 12 : expression des coefficients d'une série entière

En particulier, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = k!a_k$ donc

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

Propriété 13 : primitives de la somme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on considère sa somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

f étant continue sur $]-R,R[$, elle admet des primitives sur cet intervalle, en particulier $F_0 : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Alors F_0 est la somme de la série entière « primitive » $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m\geqslant 1}\dfrac{a_{m-1}}{m}x^m$,
de rayon de convergence R.

Exemple 15

15.1 On considère la série entière $\sum x^n$, de rayon de convergence égal à 1, et de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Sa série primitive $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{n}$ est de rayon de convergence 1, et de somme $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x)}$.

15.2 De même la série entière $\sum(-1)^n x^n$, de rayon de convergence égal à 1, a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$.

Sa série primitive $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ est de rayon de convergence 1, et de somme $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \ln(1+x)}$.

15.3 La série entière $\sum(-1)^n x^{2n}$, de rayon de convergence égal à 1, a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Sa série primitive $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ est de rayon de convergence 1, et de somme $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \arctan x}$.

⚠ Il n'y a pas de décalage d'indices $(n \to n+1)$ dans la primitivation, donc la somme commence à $n=0$.

⚠ La fonction arctan est définie (et $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, alors que la série $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ ne converge que sur $]-1,1]$.

Exemple 16

On vérifie de manière analogue aux exemples **15.1**, **15.2** et **15.3**, que la fonction $\alpha : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ est la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Par ailleurs, l'écriture $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$ aboutit à $\alpha(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (de son petit nom « argth » : *argument tangente hyperbolique*).
On aboutit alors (en posant successivement $x = y^2$ puis $x = -y^2$) aux formules suivantes :

$$\text{Si } y>0,\ \frac{\arctan\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{y^n}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \text{si } y<0,\ \frac{\alpha(\sqrt{-y})}{\sqrt{-y}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{y^n}{2n+1}.$$

Alors la fonction $h : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{\arctan\sqrt{y}}{\sqrt{y}} & \text{si } y>0 \\ \dfrac{\alpha(\sqrt{-y})}{\sqrt{-y}} & \text{si } y<0 \end{cases}$ est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ en 0, en posant $h^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3 — Développement en série entière au voisinage de 0

3.1 – Définitions, unicité

Définition : fonction développable en série entière

Soit f une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 (c'est-à-dire que I est un voisinage de 0).
On dit que f est ***développable en série entière sur*** I lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R>0$ telle que $I \subset]-R,R[$ et $\quad \forall x \in I,\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Le développement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est appelé ***développement en série de*** Taylor.

☞ ***Remarque :*** Toute fonction développable en série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0, et même sur $]-R,R[$.
⚠La réciproque est fausse : certaines fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ ne sont pas somme de leur série de Taylor, ni d'aucune série entière, comme dans l'exemple qui suit.

Exemple 17

On considère la fonction g définie par $g(0)=0$ et $g(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

- il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)g(x)$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g^{(n)}(x) = 0$, donc g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $g^{(n)}(0) = 0$.

Donc la série de Taylor de g : $\displaystyle\sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est la série nulle, de rayon de convergence infini, qui ne coïncide avec g qu'en $\{0\}$. **g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais pas développable en série entière au voisinage de 0.**

Propriété 14 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $p \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur $]-r,r[$, $r>0$. Alors, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 18

On considère la fonction $f : x \mapsto \exp x$ et $r>0$; pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $]-r,r[$ et $f^{(p)}(x) = \mathrm{e}^x$, donc par application de la formule de Taylor-reste intégral : $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$.

Mais, pour tout $t \in]-r,r[$, $0 \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^r$ donc

$$0 \leqslant R_p(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^r\int_0^x\frac{(x-t)^p}{p!}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^r\left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}\right]_0^x \leqslant \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}\mathrm{e}^r \leqslant \frac{r^{p+1}}{(p+1)!}\mathrm{e}^r.$$

De plus, $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{r^{p+1}}{(p+1)}\mathrm{e}^r = 0$, quitte à faire appel au critère de d'Alembert. On en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} R_p(x) = 0$ pour tout $x \in]-r, r[$, et donc que $\boxed{\mathbf{e}^{\boldsymbol{x}} = \sum\limits_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{+\infty}} \dfrac{\boldsymbol{x^k}}{\boldsymbol{k!}}}$ pour tout réel x.

Propriété 15 : unicité du développement en série entière

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. Si les sommes de ces deux séries entières coïncident sur un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$, et les deux séries entières ont même rayon de convergence $R \geqslant \varepsilon$.

Propriété 16 : conséquence utile

Soit f une fonction développable en série entière. f est paire [respectivement impaire] si, et seulement si, son développement ne contient que des termes pairs [respectivement impairs].

3.2 – Développements des fonctions usuelles

Propriété 17 : série de Taylor de $(1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha$ est la somme sur $]-1,1[$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} A_\alpha(n)x^n$, où

$A_\alpha(n) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha-k+1}{k}$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, le rayon de convergence de cette série entière est 1 ;
si $\alpha \in \mathbb{N}$, la série entière est un polynôme $((1+x)^n)$, de rayon de convergence infini.

On a donc les **trois développements élémentaires** :

$x \mapsto \cdots$	développement	premiers termes	rayon	réf.
$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$	$1+x+x^2+x^3+\cdots$	$R=1$	1.
$\exp x$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$	$1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots$	$R=\infty$	2.
$(1+x)^\alpha$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$	$1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\cdots$	$R=1$ (si $\alpha \neq \mathbb{N}$)	3.

On en tire les développements suivants :

$x \mapsto \cdots$	développement	premiers termes	rayon	réf.	issu de	par
$\ln(1-x)$	$-\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$	$-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots$	$R=1$	1.1	1.	intégration
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots$	$R=1$	1.2	1.1	$x \to -x$
$\arctan x$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots$	$R=1$	1.3	1.	$x \to x^2$ puis intégration
$\mathrm{sh}\, x$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\cdots$	$R=+\infty$	2.1	2	filtrage (termes impairs)
$\mathrm{ch}\, x$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$	$1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\cdots$	$R=+\infty$	2.2	2	filtrage (termes pairs)
$\sin x$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\cdots$	$R=+\infty$	2.3	2.1	alternance de signe
$\cos x$	$\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\cdots$	$R=+\infty$	2.4	2.2	alternance de signe

Obtention des développements en série entière des fonctions cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques :

Le principe est d'exploiter le développement en série entière de l'exponentielle et les formules
$\operatorname{ch}(x) = \dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$, $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$, $\cos(x) = \dfrac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$, et $\sin(x) = \dfrac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2}$.

On part de	2.	$\exp x =$	1	$+x$	$+\dfrac{x^2}{2}$	$+\dfrac{x^3}{6}$	$+\dfrac{x^4}{24}$	$+\dfrac{x^5}{120}$	$+\cdots+$	$\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\cdots$	$R=\infty$
termes pairs :	2.2.	$\operatorname{ch}(x) =$	1		$+\dfrac{x^2}{2}$		$+\dfrac{x^4}{24}$		$+\cdots+$	$\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$		$+\cdots$	$R=\infty$
termes impairs :	2.1.	$\operatorname{sh}(x) =$		x		$+\dfrac{x^3}{6}$		$+\dfrac{x^5}{120}+\cdots$			$+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\cdots$	$R=\infty$
signes alternés :	2.4.	$\cos(x) =$	1		$-\dfrac{x^2}{2}$		$+\dfrac{x^4}{24}$		$+\cdots+$	$\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$		$+\cdots$	$R=\infty$
signes alternés :	2.3.	$\sin(x) =$		x		$-\dfrac{x^3}{6}$		$+\dfrac{x^5}{120}+\cdots$			$+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\cdots$	$R=\infty$

4 — Liens avec les équations différentielles linéaires

Exemple 19

On considère la fonction $F : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, et on cherche un développement en série entière de F.

En utilisant le développement de exp : $\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)n!}$ par intégration terme à terme.

La règle du produit de Cauchy garantit que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, mais les coefficients ainsi obtenus sont trop compliqués.

On remarque alors que $F'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} + x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ et donc que

***F* est solution de l'équation différentielle linéaire $y' - xy = 1$.**

Cherchons donc les solutions de cette équation développables en série entière, sous la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec un rayon de convergence $R > 0$.

$$\begin{aligned} xy(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} &&= \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} x^m && m = n+1 \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} &&= \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p && p = n-1 \end{aligned}$$

On obtient donc $y'(x) - xy(x) = a_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_{n-1} - (n+1)a_{n+1}\right) x^n$.

En identifiant cette série entière avec $1 = 1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 0.x^n$, on trouve les conditions nécessaires et suffisantes :

$$\begin{cases} & a_1 = 1 \\ (R_n) & \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)a_{n+1} = a_{n-1} \end{cases}$$

Par ailleurs $a_0 = F(0) = 0$.

Comme (R_{2p+1}) : $a_{2p+2} = \dfrac{a_{2p}}{2p+2}$, on obtient par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $a_{2p} = 0$.

Comme (R_{2p}) : $a_{2p+1} = \dfrac{a_{2p-1}}{2p+1}$, on obtient que $\displaystyle\prod_{p=1}^{n-1} \frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}} = \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1}$, soit

$$\frac{a_{2n+1}}{a_1} = \prod_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{3.5\cdots.(2n+1)} = \frac{2.4.6.\cdots(2n)}{2.3.4.5.6\cdots.(2n-1)(2n)(2n+1)} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}.$$

Finalement $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 20

On cherche cette fois-ci les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

(E_1) $\qquad (x^2+x)y''+(3x+1)y'+y=0$

Soit $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec un rayon de convergence $R>0$, alors (en posant $p=n-1$; les -0 désignent des termes compensatoires nuls) :

terme	développement	décalage	compensation	finalement
$y(x)$	$=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$			$=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$y'(x)$	$=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$	$=\sum_{p=0}^{+\infty}(p+1)a_{p+1}x^p$		$=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$
$3xy'(x)$	$=\sum_{n=1}^{+\infty} 3n a_n x^n$		$=\sum_{n=0}^{+\infty} 3n a_n x^n - 0$	$=\sum_{n=0}^{+\infty} 3n a_n x^n$
$xy''(x)$	$=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}$	$=\sum_{p=1}^{+\infty}(p+1)p a_{p+1}x^p$	$=\sum_{p=0}^{+\infty} p(p+1)a_{p+1}x^p - 0$	$=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$
$x^2y''(x)$	$=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$		$=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 0$	$=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$

$$\begin{aligned}(x^2+x)y''(x)+(3x+1)y'(x)+y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n(n+1)+n+1)\,a_{n+1}+(1+3n+n(n-1))\,a_n\right)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)^2a_{n+1}+(n+1)^2a_n\right)x^n,\end{aligned}$$

qui est nulle si et seulement si : $\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+1)^2a_{n+1}+(n+1)^2a_n=0$ soit $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=-a_n$.
Ceci revient à dire que (a_n) est une suite géométrique de raison -1, soit $\exists C\in\mathbb{R}, a_n=C(-1)^n$.

Finalement $y(x)=C.\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\right)$ donc $y(x)=\dfrac{C}{1+x}$ pour $-1<x<1$.

5 — Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

D'après la règle sur les séries géométriques : $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour tout $z\in\mathbb{C}, |z|<1$.

Par ailleurs, en posant, pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\exp z=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$, et en utilisant le produit de Cauchy :

$\exp(z+z')=\exp z\exp z'$ pour tous $(z,z')\in\mathbb{C}$.
On retrouve alors successivement $\exp(iy)=\cos y+i\sin y$ (à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange), puis $\exp(x+iy)=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Propriété 18 : extension aux complexes

Les développements en séries entières $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et $\exp z=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ s'étendent au disque complexe de convergence ouvert (de rayons respectifs 1 et $+\infty$).