CHAPITRE 6 SÉRIES NUMÉRIQUES (EXEMPLES) 2024/2025

1 — Nature d'une série

1.1 – $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n^2+1)}{2n+1}$

$\ln(n^2+1) \sim 2\ln n$ car $\ln(n^2+1) - 2\ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} = o(\ln n)$, et $2n+1 \sim 2n$ donc $\frac{\ln(n^2+1)}{2n+1} \sim \frac{2\ln n}{2n} \geqslant \frac{1}{n}$.
Comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, $\boldsymbol{\sum_{n\geqslant 0} \frac{\ln(n^2+1)}{2n+1}}$ **diverge**.

1.2 – $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > 0$ et $\ln(n+1)-\ln n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et par ailleurs $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, alors que $\ln(n+1)-\ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc $\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$.
Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (cas de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$), donc $\boldsymbol{\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$ **diverge**.

1.3 – $\sum_{n\geqslant 0} n e^{-\sqrt{n}}$

$n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ n'a pas d'équivalent plus simple, mais $\frac{n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = n^3\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \left(\sqrt{n}\right)^6 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (en vertu des croissances comparées).
Donc $n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (cas de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). $\boldsymbol{\sum_{n\geqslant 0} n e^{-\sqrt{n}}}$ **converge**.

2 — Somme et reste d'une série convergente (télescopage)

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
$0 \leqslant \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$, et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge (cas de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$), d'où la convergence de la série.
Indication qui devrait figurer dans tout bon énoncé :
montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que (1) $\quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{x+2}$.
En multipliant (1) par x, puis en faisant tendre x vers 0, on obtient successivement $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \alpha + \frac{\beta x}{x+1} + \frac{\gamma x}{x+2}$ puis $\alpha = \frac{1}{2}$; de même, $\beta = -1$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. On trouve alors $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$, et par sommation, pour $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n}.$$

En fractionnant les sommes :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)} \text{ donc } \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}.$$

En passant ensuite à la limite, on retrouve la convergence de la série, et on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

On en déduit le reste par soustraction : $\boldsymbol{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k = n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2(N+1)(N+2)}}$.

3 — Équivalent du reste d'une série convergente

On cherche à déterminer un équivalent du reste de la série convergente $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$.

$f : t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[k;k+1]$: $\frac{1}{(k+1)^{3/2}}\leqslant\frac{1}{t^{3/2}}\leqslant\frac{1}{k^{3/2}}$. (1)

Par intégration sur $[k;k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^{3/2}}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}\leqslant\frac{1}{k^{3/2}}$. (2)

Pour $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $m\geqslant n$, $\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{(k+1)^{3/2}}\leqslant\int_n^{m+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}\leqslant\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^{3/2}}$. (3)

Or $\int_n^{m+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}=\left[\frac{t^{-1/2}}{\frac{-1}{2}}\right]_n^{m+1}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{m+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ qui tend vers $\frac{2}{\sqrt{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

En posant $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, $R_n\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant R_{n-1}$ (4),

soit
$$\frac{2}{\sqrt{n+1}}\leqslant R_n\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}. \quad (5)$$

En multipliant (5) par $\sqrt{n}$, on obtient $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\leqslant\sqrt{n}R_n\leqslant 2$ et le théorème d'encadrement donne alors $\boldsymbol{R_n\sim\frac{2}{\sqrt{n}}}$.

4 — Séries alternées

Montrer la convergence des séries suivantes : $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)239^{2n+1}}$.

On admettra les deux formules suivantes : (1) : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$ et (2) : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{4}{5^{2n+1}}-\frac{1}{239^{2n+1}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Pour quelle valeur de N peut-on être sûr *a priori* que $\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-3} près ?

Pour quelle valeur de N peut-on être sûr *a priori* que $\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}$ est une approximation de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}$ à 10^{-15} près ?

réponse

Les suites $(2n+1)$, $\left((2n+1)5^{2n+1}\right)$ et $\left((2n+1)239^{2n+1}\right)$ sont croissantes et de limite $+\infty$, donc leurs inverses tendent vers 0 en décroissant. L'application du théorème des séries alternées garantit donc la convergence des trois séries, et de plus, en posant $L_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $S_1(N)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$, et $R_1(N)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$:

$\left|R_1(N)\right|=\left|L_1-S_1(N)\right|\leqslant\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|=\frac{1}{2N+1}$, qui est plus petit que 10^{-3} si $\boldsymbol{N\geqslant 500}$.

De même, en posant

$L_2=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $S_2(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}$, et $R_2(n)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^{2n+1}}$,

$\left|R_2(n)\right|=\left|L_2-S_2(n)\right|\leqslant\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}5^{2n+1}\right|=\frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}}$, qui est plus petit que 10^{-3} si $\boldsymbol{n\geqslant 10}$: on obtient en fait $\frac{1}{19\times 5^{19}}\approx 2{,}7\,10^{-15}$ et $\frac{1}{21\times 5^{21}}\approx 10^{-16}$.

On peut de même vérifier que $\sum_{n=0}^{10}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{4}{5^{2n+1}}-\frac{1}{239^{2n+1}}\right)$ est une approximation de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-15} près.