CHAPITRE 6 SÉRIES NUMÉRIQUES 2024/2025

1 — Généralités

1.1 – définition

Définition : sommes partielles

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels ou complexes (on dira par la suite que u_n est une suite ***numérique***).
On appelle ***somme partielle d'ordre*** $n \in \mathbb{N}$ [associée à la suite (u_n)] le scalaire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définition : Série convergente/divergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
La ***série de terme général*** u_n, notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, est la suite des sommes partielles d'ordre $n \in \mathbb{N}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est finie, on dit que ***la série*** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ***converge***, et on appelle ***somme de la série*** $\sum u_n$ le scalaire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas, on dit que ***la série*** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ***diverge***, et on renonce à l'utilisation du symbole $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

⚠ Ne pas confondre *sommes partielles* d'une série $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ et *somme* de cette série $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)$;

⚠ de même, ne pas confondre *la série* elle-même $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, qui existe toujours en tant que suite, et *sa somme* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$, qui n'a de sens qu'en cas de convergence ;

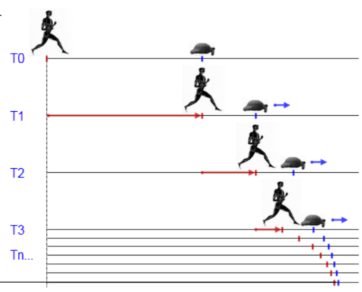
⚠ La *suite* de terme général u_n peut converger sans que la *série* de terme général u_n converge : *cf* l'exemple 3.
On étend ces définitions à des suites définies à partir de l'indice $1, 2$, *etc.*

Exemple 1

La série de terme général constant 1 diverge.

En effet, la somme partielle générique est $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 2



La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge, et sa somme vaut 2

En effet, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \to 2$ quand n tend vers $+\infty$.
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$: ceci est l'explication du paradoxe de Zénon d'Élée.

Exemple 3

La série de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $n \geqslant 1$, diverge.

En effet, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) + \cdots - \ln(2) + \ln(2) - \ln(1) = \ln(n+1)$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Remarque : et pourtant, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0\ldots$

Définition : reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente ; on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
On appelle alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ***reste de la série d'ordre*** n le réel

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Puisque $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$: le reste d'une série convergente tend vers 0.

Définition : nature d'une série

La nature d'une série est d'être soit convergente, soit divergente

Propriété 1 : « indifférence de la borne inférieure »

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant p} u_n$ ont même nature.

Propriété 2 : limite du terme général d'une série convergente

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

⚠ **La réciproque est fausse** ; en effet, la suite $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 0, mais la série $\sum u_n$ diverge (cf l'exemple 3).

Définition : divergence grossière

Par contraposée, soit (u_n) une suite qui ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge. On parle dans ce cas de ***divergence grossière***.

Exemple 4

Comme $((-1)^n)$ n'a pas de limite , $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n$ diverge [grossièrement].

Propriété 3 : linéarité de la somme

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques *convergentes*, et deux scalaires λ et μ ; alors $(\lambda\, u_n + \mu\, v_n)$ est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\, u_n + \mu\, v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

⚠ Cette propriété ne doit pas être utilisée pour scinder une somme convergente de deux séries en sommes de deux séries divergentes, en écrivant par exemple : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$.

On démontre plus loin que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$ converge, et on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ diverge.

Alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge en appliquant la contraposée de la linéarité de la somme.

☞ On peut déduire de la linéarité la propriété suivante :

Propriété 4 convergence et parties réelle/imaginaire

Soit (z_n) une suite à termes complexes, alors $\sum z_n$ converge si, et seulement si, les séries à termes réels $\sum \mathrm{Ré}\,(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}\,(z_n)$ convergent toutes les deux.

1.2 – séries géométriques

Propriété 5 — rappel : somme des termes d'une suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Ceci constitue une expression de la somme partielle de la série géométrique $\sum q^n$, pour $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, que l'on peut compléter par $\sum\limits_{k=0}^{n} 1^k = n+1$ (cas $q = 1$).

Propriété 6 : convergence d'une série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$, alors la série géométrique $\sum q^n$ converge si, et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas, la somme partielle d'ordre n, la somme et le reste d'ordre n de la série sont respectivement :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

N+V

Exemple 5

Comme $\left|\dfrac{1}{10}\right| < 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{9}{10^n}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{9}{10^n} = \dfrac{9}{10}\dfrac{1}{1-\frac{9}{10}} = \dfrac{9}{10}$ ce que l'on écrit également comme $\mathbf{0{,}9999\cdots = 1}$.

Exemple 6

V Admettons *pour l'instant* que $\sum n2^{-n}$ converge.

Posons $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n2^{-n}$: $2S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n2^{-n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n2^{-n+1}\overset{m=n-1}{=}\sum\limits_{m=0}^{+\infty}(m+1)2^{-m}$, et

$2S-S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1-n)2^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2^{-n}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$. Finalement $\boldsymbol{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n2^{-n}=2}$.

Exemple 7

N+V Considérons la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, où $u_n=2^{-n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. $u_n=\operatorname{Im}(z_n)$ où $z_n=2^{-n}\exp\left(\dfrac{in\pi}{2}\right)=\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$.

Comme $\left|\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}<1$, la série $\sum z_n$ converge, ce qui garantit par linéarité la convergence de $\sum u_n$ puisque $u_n=\dfrac{1}{2i}\left(z_n-\overline{z_n}\right)$. De plus, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n=\dfrac{1}{1-\frac{i}{2}}=\dfrac{1+\frac{i}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2i}{5}$ donc finalement $\boldsymbol{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{5}}$.

1.3 – télescopage

Propriété 7 : principe du télescopage (somme finie)

Si $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $p\leqslant q$, alors $\sum\limits_{k=p}^{q}\left(u_{k+1}-u_k\right)=u_{q+1}-u_p$

Propriété 8 : principe du télescopage

Une suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum\left(u_{n+1}-u_n\right)$ converge, et

$$\sum_{n=p}^{+\infty}\left(u_{n+1}-u_n\right)=\lim_{n\to+\infty}u_n-u_p$$

☞ cette propriété et celle relative aux séries géométriques sont, pour l'instant, les seules qui permettent le calcul *explicite* de la somme d'une série.

Exemple 8

N+V $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n(n+1)}=1-\dfrac{1}{N+1}$. En faisant tendre N vers $+\infty$, $\boldsymbol{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1}$.

Exemple 9

N $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$ donc $\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\ln(N+1)-\ln 1=\ln(N+1)$.

$\boldsymbol{\sum\limits_{n\geqslant 0}\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)}$ **diverge.**

2 — Séries à termes positifs

2.1 – Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale

Propriété 9 : comparaison série/intégrale

Soit f une fonction décroissante et continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles positives, alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

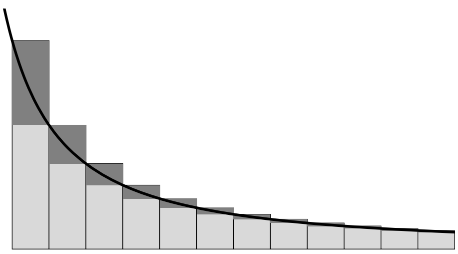
Cette conséquence est illustrée (et peut être démontrée) par l'encadrement suivant :

En posant $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(k)$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1}-f(0)\leqslant\int_0^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant S_n$$

soit

$$\boxed{\int_0^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant S_n\leqslant f(0)+\int_0^{n}f(t)\,\mathrm{d}t.}$$



Exemple 10

La série (dite « de Riemann ») $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$. En effet :

Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ qui admet une limite finie en $+\infty$ si $\alpha > 1$, et tend vers $+\infty$ si $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln n$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Résultat à connaître : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 11

La série (dite « de Bertrand ») $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n.(\ln n)^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

En effet, à l'aide d'un changement de variable $u = \ln t$:

Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_3^n \frac{1}{t.(\ln t)^\alpha}\mathrm{d}t = \int_{\ln 3}^{\ln n} \frac{1}{u^\alpha}\mathrm{d}u$ qui admet une limite finie en $+\infty$ si $\alpha > 1$, et tend vers $+\infty$ si $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\int_3^n \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = \int_{\ln 3}^{\ln n} \frac{1}{u^\alpha}\mathrm{d}u$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

☞ La comparaison avec une intégrale permet de trouver un équivalent simple aux sommes partielles d'une série divergente, et aux restes d'une série convergente.

Exemple 12

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente (cas de Riemann avec $\alpha = 1$). Cette série porte le nom de ***série harmonique***.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La comparaison avec une intégrale aboutit à

$\ln(n+1) = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant h_n \leqslant 1 + \int_1^n f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln n$, soit

$\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant h_n - \ln n \leqslant 1$; il en résulte que $h_n - \ln n = o(\ln n)$, donc que $\boldsymbol{h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n}$.

Exemple 13

Soit $\alpha > 1$; alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $R_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

La comparaison avec une intégrale aboutit, si $m \geqslant n \geqslant 0$, à

$\displaystyle\int_{n+1}^{m} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{m-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ soit

$\displaystyle\frac{(n+1)^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha} - (m-1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Faisons tendre m vers $+\infty$: $\displaystyle\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, ce qui permet de montrer que $\boldsymbol{R_n(\alpha) \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}}$.

2.2 – Théorèmes de comparaison

Propriété 10 : théorèmes de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries *à termes positifs*, alors

- si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $0 \leqslant u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $0 \leqslant u_n \sim v_n$, alors $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature ;

Remarques

☞ On peut remplacer l'hypothèse $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in N, n \geqslant m, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, ce qui revient à dire : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ « pour n assez grand » ou bien « au bout d'un certain rang », ou enfin « asymptotiquement ». Par linéarité, on peut enfin se ramener à l'hypothèse générale : u_n et v_n sont asymptotiquement de signe constant, et $|u_n| \leqslant |v_n|$.

☞ Contrairement à l'intuition (??), une hypothèse de signe asymptotiquement constant *est indispensable* pour obtenir l'implication $(u_n \sim v_n) \Longrightarrow \left(\sum v_n \text{ et } \sum u_n \text{ ont même nature}\right)$.

☞ Les propriétés $u_n \sim v_n$, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $u_n = o(v_n)$ sont naturellement asymptotiques.

☞ $u_n \sim v_n$ et $u_n = o(v_n)$ impliquent $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

N

Exemple 14

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+\sin(n)}{n^3+\sqrt{n}+1}$.

Tout d'abord, si $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} \geqslant 1 \geqslant -\sin n$ donc $\sqrt{n}+\sin(n) \geqslant 0$; de plus, $n^3+\sqrt{n}+1 \geqslant 1 > 0$, donc $u_n \geqslant 0$.

Par ailleurs, $u_n \sim \dfrac{\sqrt{n}}{n^3} = \dfrac{1}{n^{5/2}}$. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{5/2}}$ converge (cas de Riemann avec $\alpha = \dfrac{5}{2}$; donc $\boldsymbol{\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\sqrt{n}+\sin(n)}{n^3+\sqrt{n}+1}}$ **converge**.

N

Exemple 15

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, tel que Q n'ait pas de racines dans l'intervalle entier [
![$m,+\infty$[
![: $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ (avec $a_p \neq 0$) et $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{q} b_k X^k$, avec $b_q \neq 0$.

Pour n suffisamment grand (par exemple supérieur à la plus grande valeur absolue des racines de P), $P(n)$ garde un signe constant. Alors $F(n) = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ garde un signe asymptotiquement constant.

De plus, $F(n) \sim \dfrac{a_p n^p}{b_q n^q} = \dfrac{a_p}{b_q} n^{p-q}$. D'après la règle de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant m} n^{p-q}$ converge si, et seulement si, $q-p \geqslant 2$.

Finalement, $\boldsymbol{\sum F(n)}$ **converge si, et seulement si,** $\boldsymbol{q \geqslant p+2}$.

N

Exemple 16

On considère la série $\sum n2^{-n}$, à termes positifs. $n2^{-n}$ n'a pas d'équivalent plus simple.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 2^{-n} = 0$ donc pour n suffisamment grand, $0 \leqslant n^3 2^{-n} \leqslant 1$. Alors $n^3 2^{-n} = \mathcal{O}(1)$ donc $n2^{-n} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann, avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente. $\boldsymbol{\sum n2^{-n}}$ **converge**.

3 — Séries alternées

Théorème 6.1 spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant les critères suivants :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$;

(ii) $\lim(u_n) = 0$;

(iii) (u_n) est décroissante.

Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge.

Propriété 11 : majoration du reste pour une série alternée

Avec les mêmes hypothèses ((u_n) est décroissante et de limite nulle), on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$ et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$;

Alors R_n a la signe de $(-1)^{n+1}$, et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Exemple 17

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante et de limite nulle (donc positive) ; les hypothèses du théorème étant vérifiées, on en déduit **la convergence de la série** $\boldsymbol{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}}$.

De plus, soit $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^k}{k}$; alors R_n a le signe de son premier terme, donc celui de $(-1)^{n+1}$, et $\boldsymbol{|R_n| = (-1)^{n+1} R_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$.

4 — Convergence absolue

Définition : convergence absolue

On dit que la série $\sum u_n$ ***converge absolument*** lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Propriété 12 : inégalité triangulaire pour les séries convergentes

Soit $\sum u_n$ une suite absolument convergente ; alors $\sum u_n$ converge, et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

⚠ Certaines séries sont convergentes sans être absolument convergentes : *la convergence absolue implique la convergence, sans réciproque.*

Propriété 13 : comparaison et convergence absolue

Soit v_n le terme général positif d'une série convergente et (u_n) une suite complexe telle que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

5 — Règle de d'Alembert

Propriété 14 : règle de D'ALEMBERT

Soit $\sum u_n$ une suite à termes complexes *non nuls.*

On suppose l'existence de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors

- ▷ si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument ;
- ▷ si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- ▷ si $\ell = 1$, on **ne peut rien dire** quant à la convergence de u_n (cas douteux).

commentaire : ce critère, séduisant a priori, échoue dans les cas où ℓ n'existe pas, ou bien vaut 1, c'est-à-dire...la grande majorité des situations. Son usage doit donc être réservé à des circonstances particulières (séries à termes « multiplicatifs », séries entières, etc.).

Exemple 18

Soit $u_n = 5^{-n}\dbinom{2n}{n}$. Alors $u_n \neq 0$ pour tout entier n, et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5^{-n-1}\binom{2n+2}{n+1}}{5^{-n}\binom{2n}{n}} = \dfrac{1}{5}\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}\dfrac{(n!)^2}{(n+1)!^2} = \dfrac{1}{5}\dfrac{2n+2}{n+1}\dfrac{2n+1}{n+1}$ qui tend vers $\ell = \dfrac{4}{5} < 1$ quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $\boldsymbol{\sum u_n}$ **converge**.

6 — Produit de Cauchy de deux séries

Définition et propriété : produit de CAUCHY

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes absolument convergentes.

On considère la suite (w_n) de terme général $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$.

Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$

(ce qui justifie le nom de ***produit de Cauchy*** attribué à $\sum w_n$)

$$\left(\sum_{k=0}^{p} |u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{p} |v_k|\right) \leqslant \boldsymbol{\sum_{k=0}^{2p} |w_k|} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{2p} |u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{2p} |v_k|\right)$$

		$S_p(u)$			$S_{2p}(u)$		
		$\lvert u_0\rvert$	$\cdots$	$\lvert u_p\rvert$	$\cdots$	$\lvert u_{2p}\rvert$	$\cdots$
	$\lvert v_0\rvert$	$\mathbf{\lvert u_0 v_0\rvert}$	$\cdots$	$\mathbf{\lvert u_p v_0\rvert}$	$\cdots$	$\mathbf{\lvert u_{2p} v_0\rvert}$	$\cdots$
$S_p(v)$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$		$\iddots$	$\vdots$	
	$\lvert v_p\rvert$	$\mathbf{\lvert u_0 v_p\rvert}$		$\mathbf{\lvert u_p v_p\rvert}$		$\vdots$	
$S_{2p}(v)$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$			$\vdots$	
	$\lvert v_{2p}\rvert$	$\mathbf{\lvert u_0 v_{2p}\rvert}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\lvert u_{2p} v_{2p}\rvert$	
		$\vdots$					

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$$

		$S_p(u)$						
		u_0	u_1	u_2	$\cdots$ $\cdots$	u_p	$\cdots$
	v_0	u_0v_0	$\mathbf{u_1v_0}$	u_2v_0	$\mathbf{u_3v_0}$ $\cdots$	$\mathbf{u_pv_0}$	$\cdots$
	v_1	$\mathbf{u_0v_1}$	u_1v_1	$\mathbf{u_2v_1}$	$\iddots$		
$S_p(v)$	v_2	u_0v_2	$\mathbf{u_1v_2}$		$\iddots$		
		$\mathbf{u_0v_3}$ $\vdots$	$\iddots$	$\iddots$			
	v_p	$\mathbf{u_0v_p}$				u_pv_p	
		$\vdots$					

Utilité de ce résultat : il sert principalement à montrer la propriété $\exp(z+z') = \exp(z).\exp(z')$, et par ailleurs, permet de déterminer certaines sommes de séries :

N+V

Exemple 19

Soit $w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{(k+1)(k+2)}$. On constate que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, où $u_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ et $v_n = 2^{-n}$.

On sait que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ converge, et par ailleurs que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = 2$.

Il en résulte, en utilisant le résultat de la section 2 (produit de Cauchy) que $\sum w_n$ converge et que sa somme vaut 2.

7 — Plan d'étude d'une série

On considère la série $\sum u_n$, dont on souhaite étudier la convergence.

Étape 1 On commence par vérifier que u_n tend vers 0. Sinon, il y a divergence grossière et l'affaire est entendue.

Étape 2 On examine le signe de u_n. S'il est asymptotiquement de signe constant, on passe à l'étape suivante ; sinon, on passe à l'étape 4.

Étape 3 On recherche un équivalent simple de u_n.

Si on trouve un équivalent en $\frac{K}{n^\alpha}$ ou $K.q^n$, on peut en déduire la nature de la série.

Sinon, on essaie de majorer ou minorer u_n par le terme d'une série de Riemann ou d'une série géométrique.

En cas d'échec, on peut utiliser le théorème de comparaison d'une série et d'une intégrale.

Étape 4 Étudier la série $\sum |u_n|$ en repartant de l'étape 3.

Étape 5 *En cas d'échec*, démontrer la convergence absolue (ou la divergence grossière) à l'aide du critère de d'Alembert.

8 — Étude avec `python`

Équivalents de sommes et de reste

On décide ici de comparer $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ à l'équivalent $E_n(\alpha) = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ (si $0 < \alpha < 1$), et

$R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ à l'équivalent $U_n(\alpha) = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ (si $\alpha > 1$). (*Équivalent déterminé dans l'exemple 13*).

On utilise les fonctions suivantes, écrites en `python` :

```
import math
def sompart(n,alpha) :      # calcul de la somme partielle
    s=0.     # valeur initiale
    for i in range(1,n+1) :     # i varie de 1 à n
        s=s+1./(i**alpha)     # on somme les termes
return(s)     # résultat de la fonction
```

```python
def reste(n,alpha) :      # calcul du reste d'ordre n
    r=0.
    rs=1
    i=n+1
    if (alpha>1) :      # cas où la série converge
        while (abs(r-rs)>10**(-16)) and (i<20*n) :      # on arrête pour u_n petit
            rs=r
            r=r+1./(i**alpha)
            i=i+1
        return(r)
    else :
        return(float('nan'))      # si la série diverge
```

```python
def equivsom(n,alpha) :      # calcul d'un équivalent de la somme
    if alpha==1 :      # cas particulier, α = 1
        return(math.log(n))
    else :      # cas général
        return((n**(1.-alpha)-1)/(1.-alpha))
```

```python
def equivreste(n,alpha) :      # calcul d'un équivalent du reste
    return((n**(1.-alpha))/(alpha-1.))
```

Valeurs renvoyées par les fonctions $E_n = \dfrac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et Δ_n définie par $\Delta_n(\alpha) = S_n(\alpha) - E_n(\alpha)$.

n	100	250	1000	10000
$S_n(0.2)$	49.2284626287	103.008467722	313.377473149	1980.46181405
$E_n(0.2)$	48.5133963192	102.326688042	312.735803939	1979.86649058
$\Delta_n(0.2)$	0.715066309477	0.681779679626	0.641669210202	0.595323470578
$S_n(0.5)$	18.5896038248	30.1940343286	61.8010087652	198.54464545
$E_n(0.5)$	18.0	29.6227766017	61.2455532034	198.0
$\Delta_n(0.5)$	0.589603824784	0.571257726877	0.555455561876	0.544645449524
$S_n(0.8)$	8.13443642804	10.6539333836	15.4698103822	27.1106442826
$E_n(0.8)$	7.55943215755	10.0854408414	14.9053585277	26.547867224
$\Delta_n(0.8)$	0.575004270493	0.568492542218	0.564451854552	0.56277705857
$S_n(1.0)$	5.18737751764	6.10067524943	7.48547086055	9.78760603604
$E_n(1.0)$	4.60517018599	5.52146091786	6.90775527898	9.21034037198
$\Delta_n(1.0)$	0.582207331652	0.57921433157	0.577715581568	0.577265664068

On constate que $E_n(\alpha) \sim S_n(\alpha)$ pour $\alpha \leqslant 1$. On montre par ailleurs que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) - E_n(1) = \gamma$ (« constante » d'Euler)

Valeurs renvoyées par les fonctions $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}, U_n = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ et δ_n définie par $\delta_n(\alpha) = R_n(\alpha) - U_n(\alpha)$.

n	100	250	1000	10000
$R_n(2)$	0.0094500416425	0.0037919906653	0.000949498916646	$9.49949876666e-05$
$U_n(2)$	0.01	0.004	0.001	0.0001
$\delta_n(2)$	-0.0005499583575	-0.000208009334701	$-5.05010833542e-05$	$-5.00501233336e-06$
$R_n(3)$	$4.93774374011e-05$	$7.94805999926e-06$	$4.98250187498e-07$	$4.9869999625e-09$
$U_n(3)$	$5e-05$	$8e-06$	$5e-07$	$5e-09$
$\delta_n(3)$	$-6.2256259895e-07$	$-5.19400007414e-08$	$-1.74981250164e-09$	$-1.30000375002e-11$
$R_n(5)$	$2.45037707581e-09$	$6.34501449536e-11$	$2.09938722686e-13$	$-2.49900049985e-17$
$U_n(5)$	$2.5e-09$	$6.4e-11$	$2.5e-13$	$2.5e-17$
$\delta_n(5)$	$-4.9622924189e-11$	$-5.49855046428e-13$	$-4.00612773141e-14$	$9.99500149965e-21$