CHAPITRE 5 COURBES PARAMÉTRÉES (EXEMPLES) 2024/2025

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et d'une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 — Des asymptotes

On considère l'arc $\mathscr{A}$ défini par le paramétrage $\begin{cases} x(t) &= t+\dfrac{1}{t} \\ y(t) &= t+1+\dfrac{4}{t-1} \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1.1 – Intervalle d'étude

Les fonctions x et y sont toutes deux continues sur $I_1=]-\infty,0[$, $I_2=]0,1[$, $I_3=]1,+\infty[$. Il n'y a pas de symétrie apparente.

1.2 – Tableau de variations

x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs intervalles de définition.

$x'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$, et $y'(t)=1-\dfrac{4}{(t-1)^2}=\dfrac{t^2-2t-3}{(t-1)^2}=\dfrac{(t+1)(t-3)}{(t-1)^2}$, d'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$		$+$		$+$	
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty\|\|+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty\|\|+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit immédiatement un point singulier en $t=-1$, une asymptote horizontale $y=-3$ en $t=0$, une asymptote verticale $x=2$ en $t=1$, une branche infinie quand $t\to\pm\infty$, et un point à tangente horizontale en $t=3$.

1.3 – Étude locale

En $\pm\infty$, $\dfrac{y(t)}{x(t)}\to 1$, et par ailleurs $y(t)-x(t)=t+1+\dfrac{4}{t-1}-t-\dfrac{1}{t}=1+\dfrac{3}{t}+o\left(\dfrac{1}{t}\right)$; il y a une asymptote oblique d'équation $y=x+1$.

La courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$, et en-dessous en $-\infty$.

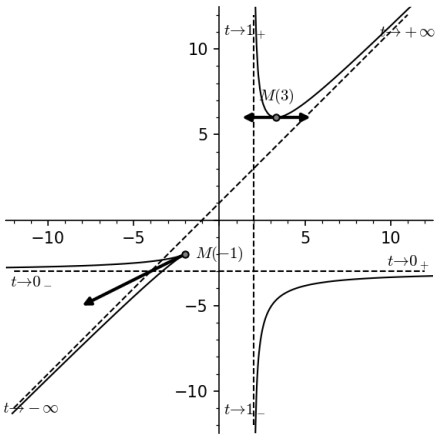
Pour étudier la nature du point singulier $M(-1)$, on peut poser $t=-1+h$:

$x(t)=-1+h+\dfrac{1}{-1+h}=-1+h-(1+h+h^2+h^3+o(h^3))=-2-h^2-h^3+o(h^3)$,

et $y(t)=h+\dfrac{4}{-2+h}=h-\dfrac{2}{1-\frac{h}{2}}=h-2\left(1+\dfrac{h}{2}+\dfrac{h^2}{4}+\dfrac{h^3}{8}+o(h^3)\right)$

$=-2-\dfrac{h^2}{2}-\dfrac{h^3}{4}+o(h^3)$, et ainsi

$\overrightarrow{OM}(t)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\dfrac{h^2}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\dfrac{h^3}{4}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\vec{o}(h^3)$, ce qui correspond à un point de rebroussement de première espèce de tangente dirigée par $-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.



2 — La néphroïde – Tracé

On considère l'arc $\mathscr{N}$ défini par le paramétrage $\begin{cases} x(t) &= 4\cos^3 t \\ y(t) &= \sin(3t)+3\sin t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

2.1 – Symétries, intervalle d'étude

x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et de plus elles sont toutes deux 2π-périodiques. Il suffit donc d'étudier $\mathscr{N}$ sur $[-\pi,\pi]$.

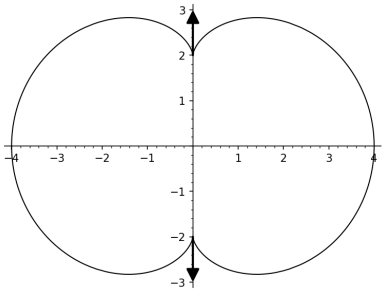
De plus, $x(-t)=x(t)$ et $y(-t)=-y(t)$, donc $M(-t):(x(t),-y(t))$ est l'image de $M(t):(x(t),y(t))$ par une symétrie d'axe $y=0$ (O_x). On peut donc se ramener à l'intervalle d'étude $[0,\pi]$.

Enfin, $x(\pi-t)=-x(t)$ et $y(\pi-t)=y(t)$, donc $M(\pi-t):(-x(t),y(t))$ est l'image de $M(t):(x(t),y(t))$ par une symétrie d'axe $x=0$ (O_y). On peut donc se ramener à l'intervalle d'étude $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2.2 – Tableau de variations

$x'(t)=-12\cos^2 t\sin t$ et $y'(t)=3\cos(3t)+3\cos(t)=6\cos(2t)\cos t$, d'où le tableau de variations

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	$-3\sqrt{2}$	$-$	0
$y'(t)$	6	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	4	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2



2.3 – Étude des points singuliers

On constate que $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point singulier, ainsi que son symétrique $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. On étudie donc un développement limité de $M(t)$ en $\frac{\pi}{2}$:

$$M\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=\begin{pmatrix}4\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\\ \sin\left(3\frac{\pi}{2}-3h\right)+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\sin^3 h\\ -\cos 3h+3\cos h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4h^3+o(h^3)\\ 2-3h^2+o(h^3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+h^2\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}+h^3\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\vec{o}(h^3).$$

Il en résulte que ce point est un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale.

3 — Enveloppe de droites

Soit la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$: pour $t\in\mathbb{R}$, $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ passe par le point $M(t)$: $(4\cos^3 t, \sin(3t)+3\sin t)$, et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t)$: $(\cos(2t),\sin(2t))$.
On sait que l'enveloppe de la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est paramétrée par $A(t)=M(t)+\lambda(t)\vec{u}(t)$ si, et seulement si,

$\det\left(\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right).\lambda(t)=-\det\left(\vec{M}'(t),\vec{u}(t)\right)$.

Or $\det\left(\vec{u}'(t),\vec{u}(t)\right)=\begin{vmatrix}-2\sin(2t) & \cos(2t)\\ 2\cos(2t) & \sin(2t)\end{vmatrix}=-2\neq 0$, et

$\vec{M}'(t)=\begin{pmatrix}-12\cos^2 t\sin t\\ 6\cos(2t)\cos t\end{pmatrix}=6\cos t\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}$, donc

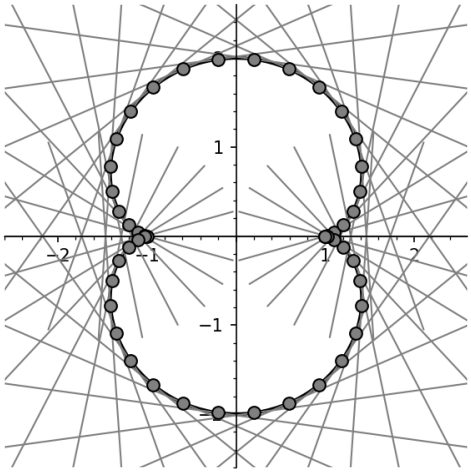
$\det\left(\vec{M}'(t),\vec{u}(t)\right)=6\cos t\begin{vmatrix}-\sin(2t) & \cos(2t)\\ \cos(2t) & \sin(2t)\end{vmatrix}=-6\cos t$;

$\lambda(t)=-3\cos t$ et un paramétrage de l'enveloppe est

$t\mapsto A(t)=M-3\cos t\,\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}4\cos^3 t-3\cos t\left(2\cos^2 t-1\right)\\ \sin(3t)+3\sin t-6\sin t\cos^2 t\end{pmatrix}$.

Après simplification, l'enveloppe est paramétrée par

$$\begin{cases}x_A(t)=3-2\cos^3 t\\ y_A(t)=2\sin^3 t\end{cases}.$$



4 — Base de Frenet, développée

On cherche à déterminer la base de Frenet, le rayon de courbure, et la développée de la néphroïde définie ci-dessus.

Le vecteur dérivée en $M(t)$ est $\vec{M}'(t)=\begin{pmatrix}-12\cos^2 t\sin t\\ 6\cos(2t)\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\sin(2t)\cos t\\ 6\cos(2t)\cos t\end{pmatrix}=6\cos t\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}$.

Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos t>0$ donc les points sont réguliers et

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left\|\vec{M}'(t)\right\|=6\cos t$, $\vec{T}=\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}$ et $\vec{N}=\begin{pmatrix}-\cos(2t)\\ -\sin(2t)\end{pmatrix}$.

On continuera donc les calculs sur cet intervalle ; sur l'intervalle complémentaire $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, on peut raisonner par symétrie par rapport à O_y.

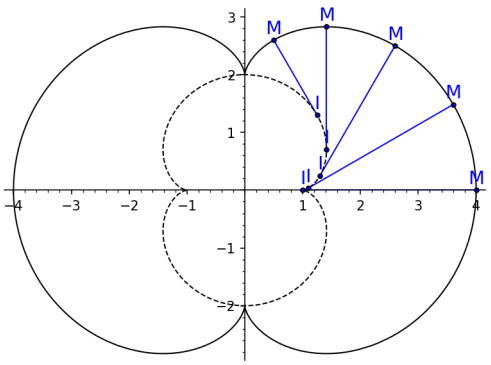
Par identification avec $\vec{T}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$, on trouve $\alpha=2t+\frac{\pi}{2}$, donc $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=2$.

Alors $R=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}=3\cos t$.

Alors, un paramétrage de la développée est

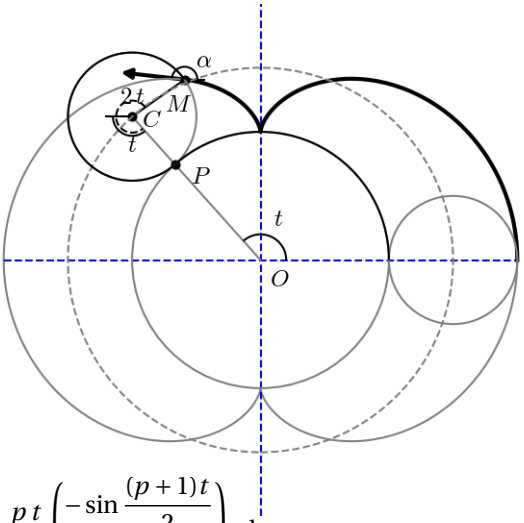
$t\mapsto I\to M+R\vec{N}=\begin{pmatrix}4\cos^3 t\\ \sin(3t)+3\sin t\end{pmatrix}-3\cos t\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\cos^3 t\\ 2\sin^3 t\end{pmatrix}$.

On retrouve le résultat obtenu ci-dessus (puisque la développée est l'enveloppe des normales).



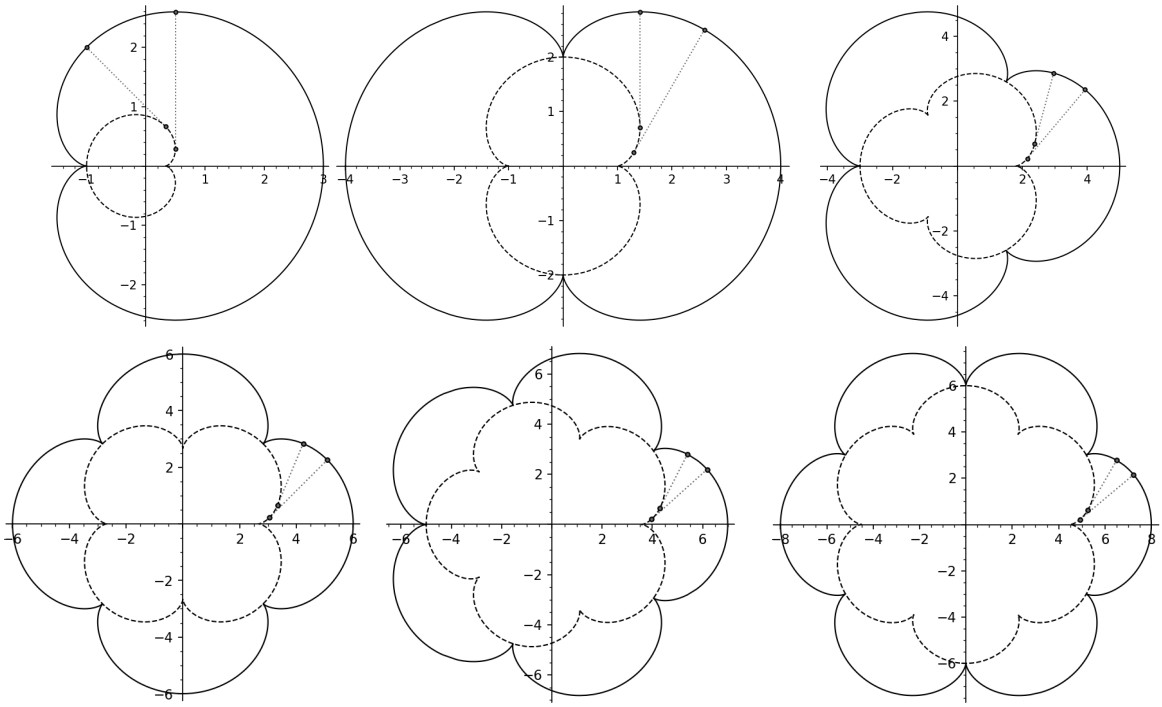
5 — Épicycloïdes

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul, et un cercle de centre O et de rayon p, autour duquel tourne sans glisser un cercle de rayon 1.



On appelle C le centre du cercle extérieur (celui qui tourne),
t l'angle de rotation de ce cercle (ainsi $t = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OC}\right)$),
P le point de contact des deux cercles, et P' le symétrique de P par rapport à C.
Comme le roulement se fait sans glissement, $\left(\overrightarrow{CP'}, \overrightarrow{CM}\right) = p\,t$
donc $\left(\vec{i}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{CP'}\right) + \left(\overrightarrow{CP'}, \overrightarrow{CM}\right) = p\,t + t = (p+1)t$.
Alors un paramétrage de la courbe décrite par M est
$t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} (p+1)\cos t + \cos\left((p+1)t\right) \\ (p+1)\sin t + \sin\left((p+1)t\right) \end{pmatrix}$.
Cette courbe s'appelle ***épicycloïde à p rebroussements***
(si $p = 1$, c'est une ***cardioïde***; si $p = 2$, une ***néphroïde***).

Sur l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right[$, le vecteur dérivé est $\vec{M}'(t) = 2(p+1)\cos\dfrac{p\,t}{2}\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{(p+1)t}{2} \\ \cos\dfrac{(p+1)t}{2} \end{pmatrix}$, donc

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2(p+1)\cos\dfrac{p\,t}{2}$ et $\vec{T} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{(p+1)t}{2} \\ \cos\dfrac{(p+1)t}{2} \end{pmatrix}$, et donc $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{(p+1)t}{2}$.

On en déduit que $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = 4\dfrac{p+1}{p+2}\cos\dfrac{pt}{2}$, et que la longueur de l'épicycloïde sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{p}\right[$ est
$\ell_0 = 2(p+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{p}} \cos\frac{pt}{2}\mathrm{d}t = \frac{4(p+1)}{p}$, donc la longueur totale de l'épicycloïde est $\ell = 2p\ell_0 = 8(p+1)$.
Un calcul un peu laborieux donne un paramétrage de la développée de l'épicycloïde, ce qui permet de montrer que cette développée est semblable à l'épicycloïde. Ci-dessous : l'épicycloïde et sa développée pour $p \in \{1,2,3,4,5,6\}$.