

CHAPITRE 5

ARCS PARAMÉTRÉS

2024/2025

On se place dans le plan affine euclidien \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 — Étude d'une courbe paramétrée

1.1 – généralités

Définition : arc paramétré de classe \mathcal{C}^k

Un **arc paramétré** de classe \mathcal{C}^k est la donnée d'un couple (I, \vec{F}) , où I est un intervalle de \mathbb{R} et \vec{F} une fonction de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^2 .

Définition : support géométrique

Soit γ un arc paramétré de \mathcal{C}^k , le **support géométrique** de γ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $F(t)$ pour $t \in I$.

Remarque : la notion d'**arc paramétré** est analogue à celle de mouvement en physique; elle se distingue de celle de **support géométrique**, qui est l'analogue de la trajectoire.

Le terme de **courbe** est ambigu et peut désigner l'arc paramétré comme son support géométrique.

Un même support correspond à une infinité d'arcs paramétrés, par exemple les deux arcs suivants définissent un cercle privé d'un point :

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta \\ y(\theta) = \sin \theta \end{cases}, \theta \in]-\pi, \pi[\quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}, t \in]-\infty, \infty[$$

Définition : point régulier

Soit (I, F) un arc paramétré plan de classe \mathcal{C}^1 , et $M(t)$ le point du plan de coordonnées $\vec{F}(t)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On dit que $M(t_0)$ est un point **régulier** si $\vec{M}'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$.

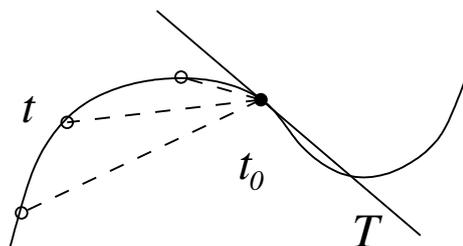
Un point non régulier est dit **singulier** ou **stationnaire**.

Propriété 1 : tangente en un point régulier

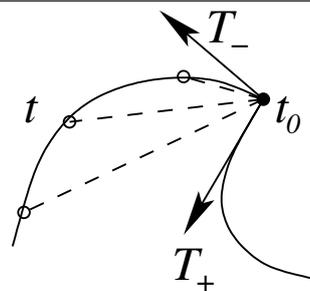
Soit $M(t_0)$ un point régulier d'un arc paramétré plan de classe \mathcal{C}^1 .

Alors, la tangente en $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ et de direction $\vec{F}'(t_0)$. Autrement dit, elle est la droite paramétrée par un DL1 de \vec{F} en $t_0 : h \mapsto \vec{F}(t_0) + h \cdot \vec{F}'(t_0)$; de plus, elle est définie par l'équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad y'(t_0) \cdot x - x'(t_0) \cdot y = y'(t_0) \cdot x(t_0) - x'(t_0) \cdot y(t_0).$$



tangente en $M(t_0)$



deux demi-tangentes en $M(t_0)$

1.2 – Méthodes

Méthode 1 : étude des symétries d'un arc paramétré

Soit (C) un arc paramétré, défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y , définies de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .

Lorsque x et y présentent **simultanément** une des propriétés suivantes :

parité ($F(t) = F(-t)$); imparité ($-F(t) = F(-t)$); symétrie ($F(t) = F(a-t)$); périodicité ($F(t+a) = F(t)$) on peut réduire l'intervalle d'étude à $I \subset \mathbb{R}_+$ (parité et imparité), $I \subset [a, +\infty[$ (symétrie), $I \subset [t_0, t_0+a]$ (périodicité), puis compléter le tracé de la courbe par une transformation géométrique.

voir à ce sujet les exemples 1,2 et 3.

Méthode 2 : étude des variations globales d'un arc paramétré

Soit (C) un arc paramétré, défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y .
 On commence par établir un tableau de variations comparé de x et y pour $t \in I$, tenant principalement compte du signe de x' et y' et des valeurs de x, x' et y, y' aux points « cruciaux » (bornes des intervalles de définition, points où x' et y' s'annulent en particulier).
 On en déduit le sens général de variation de la courbe sur tout intervalle où x' et y' sont monotones, en tenant compte du tableau :

	$y'(t) < 0$	$y'(t) = 0$	$y'(t) > 0$
$x'(t) < 0$	↙	←	↘
$x'(t) = 0$	↓	??	↑
$x'(t) > 0$	↘	→	↗

voir à ce sujet les exemples 1, 2 et 3.

Méthode 3 : étude des points singuliers

Soit (C) un arc paramétré, défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y , et $M(t_0)$ un **point singulier** de (C) , c'est-à-dire que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$. On veut déterminer l'allure de (C) autour de $M(t_0)$.
 on suppose qu'il existe deux entiers p et q tels que $q > p > 1$, et que : $\vec{F}^1(t_0) = \dots = \vec{F}^{(p-1)}(t_0) = 0$ et $\vec{F}^{(p)}(t_0) \neq 0$, $\vec{F}^{(p)}(t_0), \dots, \vec{F}^{(q-1)}(t_0)$ sont colinéaires et $\vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0)$ ne sont pas colinéaires.

Alors (C) a autour de $M(t_0)$ la même nature que la courbe paramétrée dans le repère $(M(t_0); \vec{F}^{(p)}(t_0), \vec{F}^{(q)}(t_0))$ par $x(t) = t^p, y(t) = t^q$, c'est-à-dire :

	p pair	p impair
q impair	<p>reb. 1^{ère} espèce</p>	<p>inflexion</p>
q pair	<p>reb. 2^{ème} espèce</p>	<p>ordinaire</p>

En pratique, pour trouver p et q , on utilise un développement limité en parallèle de x et y :

$$\begin{pmatrix} x(t_0 + h) \\ y(t_0 + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \frac{h^p}{p!} \begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix} + \dots + \frac{h^q}{q!} \begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^{q+1}) \\ o(h^{q+1}) \end{pmatrix}$$

ce qui fournit un vecteur directeur de la tangente et la nature du point.
 voir à ce sujet les exemples 2 et 4.

Méthode 4 : étude des branches infinies d'un arc paramétré

Soit (C) un arc paramétré, défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y .
 On cherche à déterminer la nature des branches infinies de (C) , qui peuvent se présenter lorsque $\|\vec{OM}(t)\|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers t_0 , ou bien lorsque t tend vers $\pm\infty$.

Dans le premier cas ($\|\vec{OM}(t)\|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers t_0), on étudie successivement les cas suivants (non exhaustifs, mais suffisants dans le cadre du programme) :

- $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$: **asymptote horizontale d'équation** $y = \ell$.
- $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$: **asymptote verticale d'équation** $x = \ell$.
- $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$.
 - $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R}^*$: **branche infinie d'axe** $y = \ell$.
 - $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - m x(t) = p \in \mathbb{R}$: **asymptote oblique d'équation** $y = m x + p$.
 - $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - m x(t) = \pm\infty \in \mathbb{R}$: **branche parabolique d'équation** $y = m x + p$.
 - $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ [resp. $\pm\infty$] : **branche parabolique d'axe** O_x [resp. O_y].

voir à ce sujet l'exemple 3.

1.3 – Exemples

Exemple 1

$$(x(t), y(t)) = (\cos(2t), \sin(3t))$$

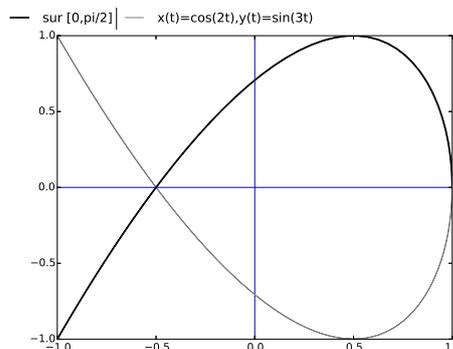
1. Étude des symétries

- * x et y sont 2π -périodiques : la courbe est fermée. On peut l'étudier sur $[-\pi; \pi]$.
- * x est pair, y est impair : la courbe est symétrique par rapport à l'axe $y = 0$. On ramène l'étude à $[0, \pi]$.
- * $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$: la courbe est parcourue deux fois sur $[0, \pi]$. On ramène l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Tableau de variations

$(x'(t), y'(t)) = (-2 \sin(2t), 3 \cos(3t))$, d'où le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	-	$-\sqrt{3}$	-	0
$y'(t)$	3	+	0	-	0
$x(t)$	1	\searrow	$\frac{1}{2}$	\searrow	-1
$y(t)$	0	\nearrow	1	\searrow	-1



Exemple 2

$$(x(t), y(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

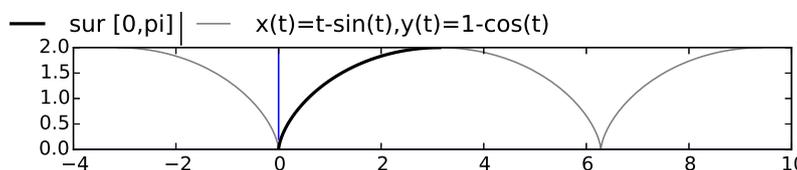
1. Étude des symétries

- * x est pair, y est impair : la courbe est symétrique par rapport à la droite $y = 0$. On ramène l'étude à \mathbb{R}_+ .
- * $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$: la courbe est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. On peut l'étudier sur $[0; \pi]$.

$(x'(t), y'(t)) = (1 - \cos(t), \sin(t))$, d'où le tableau :

2. Tableau de variations

t	0		π
$x'(t)$	0	+	2
$y'(t)$	0	+	1
$x(t)$	0	\nearrow	π
$y(t)$	0	\nearrow	2



3. Étude du point singulier en 0

$x(t) = \frac{t^3}{6} + o(t^4)$ et $y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + o(t^4)$, soit

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$, donc $p = 2$ et $q = 3$: il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce, de tangente verticale.

Exemple 3

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t^2}{1-t}, 2t+1 \right) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

1. Étude des symétries

Cet arc ne présente *a priori* pas de symétrie remarquable. Néanmoins, on peut, avec une grosse pincée d'intuition ou une indication externe, remarquer que

$$(x(2-t), y(2-t)) = \left(\frac{(2-t)^2}{-1+t}, 1+2(2-t) \right) = \left(\frac{(-2+t)^2}{t-1}, 5-2t \right) \text{ et donc}$$

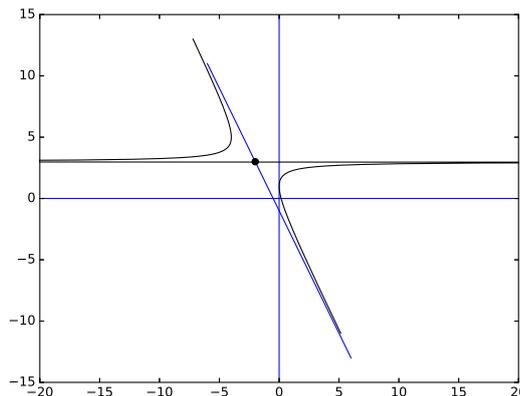
$(x(2-t), y(2-t)) + (x(t), y(t)) = (-4, 6)$: la courbe est donc invariante par symétrie axiale de centre $C : (-2, 3)$, et on peut l'étudier sur $]1, +\infty[$.

2. Tableau de variations

t	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	$\parallel -\infty$	$\nearrow -4$	$\searrow -\infty$
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\nearrow 3$	$\nearrow 5$	$\nearrow +\infty$	

3. Branches infinies

La courbe a une asymptote horizontale en $t = 1$, d'équation $y = 3$.
 Quand $t \rightarrow \pm\infty$, $x(t)^2 + y(t)^2 \rightarrow +\infty$, et $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(1-t)(2t+1)}{t^2} \rightarrow -2$.
 Par ailleurs $y(t) + 2x(t) = 1 + 2t + \frac{2t^2}{1-t} = \frac{1+t}{1-t} \rightarrow -1$
 Donc la courbe a en $t \rightarrow \pm\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = -2x - 1$.

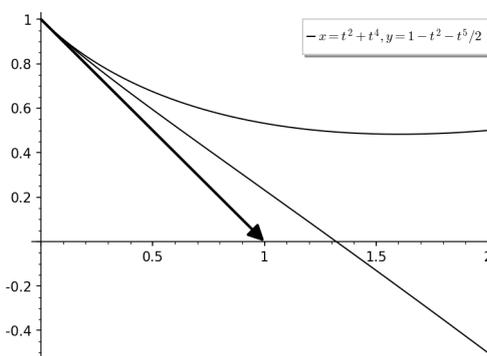


Exemple 4

$$(x(t), y(t)) = \left(t^2 + t^4, 1 - t^2 - \frac{t^5}{2} \right) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Étude de(s) point(s) singulier(s)

$x'(t) = 3t + 4t^3 = t(3 + 4t^2)$ donc x' ne s'annule qu'en 0;
 comme $y'(0) = 0$, il n'y a qu'un point singulier en 0.
 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t) \\ o(t) \end{pmatrix}$,
 donc
 $p = 2, q = 4; M(0)$ est un point d'inflexion de deuxième espèce, de tangente dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



2 — Propriétés métriques d'une courbe plane

2.1 – longueur, abscisse curviligne

Définition : longueur d'un arc paramétré

Soit $(C) = ([a, b], f)$ un arc paramétré plan régulier de classe \mathcal{C}^1 , alors **la longueur de** (C) est l'intégrale

$$\ell = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

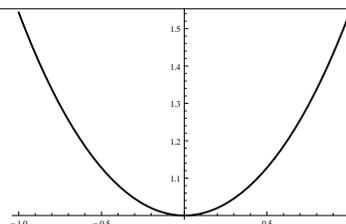
Si (C) est défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y , alors $\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$;

Si (C) est défini par une équation cartésienne $y = g(x)$, alors $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$. cf. exemples 5, 6

Exemple 5

$$y = \text{ch}(x) \text{ sur } [-1, 1].$$

Cet arc (dont le support est appelé **chaînette**) est de classe \mathcal{C}^1 , et
 $\sqrt{1 + g'(x)^2} = \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)} = \text{ch}(x)$ donc la longueur de l'arc est
 $\int_{-1}^1 \text{ch}(x) dx = [\text{sh}(x)]_{-1}^1 = 2 \text{sh}(1)$.



Exemple 6

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \text{ sur } [0, 2\pi].$$

On reconnaît le cercle unité, bien sûr de classe \mathcal{C}^1 : $\|f'(t)\|^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ donc $\int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$.

Définition : abscisse curviligne

Soit (C) un arc de classe \mathcal{C}^1 , et défini par un paramétrage : $M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

On choisit sur cet arc (C) une origine M_0 , correspondant à une valeur t_0 du paramètre.

L'**abscisse curviligne** s est la fonction de I dans \mathbb{R} qui s'annule en M_0 et qui vérifie

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{dM}{dt} \right\| = \|\vec{M}'(t)\| \text{ c'est-à-dire } s(t) = \int_{t_0}^t \|\vec{M}'(u)\| du = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du$$

Le signe de l'abscisse curviligne correspond à l'orientation de la courbe (le « sens de parcours »), et sa valeur absolue est la longueur de l'arc $M_0M(t)$.

On suppose à partir de maintenant que l'arc (C) est régulier, c'est-à-dire sans point singulier.

Alors s est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et bijective de I dans \mathbb{R} , donc est un paramétrage admissible de (C).
On peut donc **rectifier** (C), c'est-à-dire le paramétrer par s .

2.2 – repère de Frenet, courbure

Définition : repère de FRENET

$\vec{T} = \vec{M}'(s)$ est le vecteur tangent unitaire en $M(s)$, dirigé « dans le sens du mouvement », c'est-à-dire suivant les valeurs croissantes de s ; on définit d'autre part \vec{N} comme l'image de \vec{T} par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Le repère orthonormé $(M(s); \vec{T}, \vec{N})$ est appelé **repère de Frenet**.

On peut utiliser la propriété suivante : soit $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ un vecteur unitaire (ie de norme 1), alors $\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ est l'image de \vec{u} par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc (\vec{u}, \vec{v}) est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 .

Exemple 7

1. $\vec{M}'(t) = (1 - \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j}$.

2. $\|\vec{M}'(t)\|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

Les points singuliers de la courbe vérifient $\frac{t}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Ce sont des points de rebroussement de première espèce. Sur l'intervalle $]0, 2\pi[$, $s'(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$

3. En choisissant $t = 0$ comme origine des abscisses curvilignes : $s(t) = \left[-4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t = 4 - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

La longueur de l'arche correspondante à $]0, 2\pi[$ est $s(2\pi) = 8$.

4. En divisant $\vec{M}'(t)$ par sa norme sur $]0, 2\pi[$, on obtient successivement :

$$\vec{T} = \frac{1}{s'(t)}\vec{M}'(t) = \sin\frac{t}{2}\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\vec{j} \text{ et alors } \vec{N} = -\cos\frac{t}{2}\vec{i} + \sin\frac{t}{2}\vec{j}$$

On suppose à partir de maintenant que l'arc (C) est de classe \mathcal{C}^2

Définition : courbure, rayon de courbure

La **courbure** de (C) au point $M(s)$ est le réel γ tel que $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \cdot \vec{N}$.

Alors $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}$.

Le **rayon de courbure** R est l'inverse de la courbure; il est considéré comme infini (sans signe!) si la courbure est nulle, et réciproquement.

Exemple 8

Reprenons l'exemple 7. Nous avons vu que $\frac{ds}{dt} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, $\vec{T} = \sin\frac{t}{2}\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\vec{j}$ et $\vec{N} = -\cos\frac{t}{2}\vec{i} + \sin\frac{t}{2}\vec{j}$.

Alors $\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{1}{2} \left(\sin\frac{t}{2}\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\vec{j}\right) = \frac{1}{4\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \vec{T}$. Par identification dans $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}$, $\gamma = \frac{-1}{4\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

Exemple 9

Reprenons l'exemple 5 : l'abscisse curviligne de la chaînette d'équation cartésienne $y = \text{ch}(x)$, d'origine $x = 0$, est $\text{sh}(x)$. Paramétrons cette chaînette en posant $(x(t), y(t)) = (t, \text{ch}(t))$, alors $\frac{ds}{dt} = \text{ch}(t)$, et $\vec{M}'(t) = \vec{i} + \text{sh}(t)\vec{j}$, donc

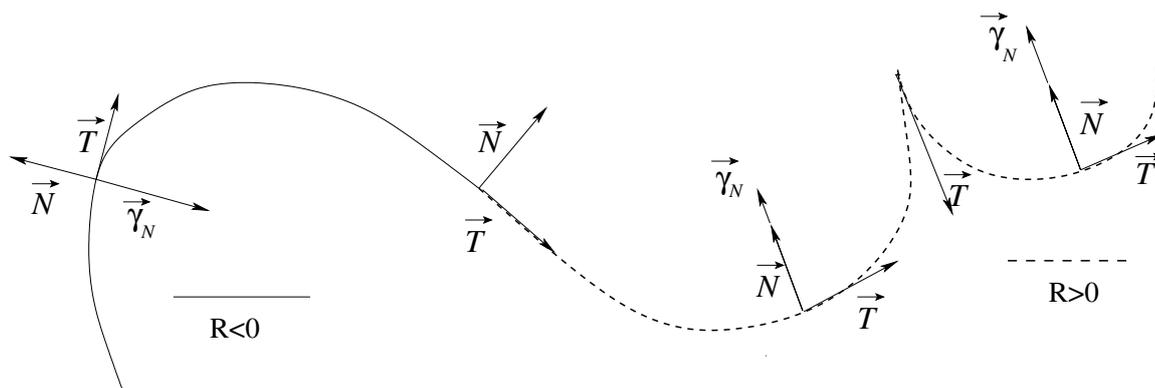
$$\vec{T} = \frac{1}{\text{ch}(t)}\vec{i} + \text{th}(t)\vec{j} \text{ et } \vec{N} = -\text{th}(t)\vec{i} + \frac{1}{\text{ch}(t)}\vec{j}$$

Alors $\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{1}{\text{ch}(t)} \left(\frac{-1}{\text{ch}^2(t)}\vec{i} - \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}\vec{j} \right) = \frac{-1}{\text{ch}^2(t)} \vec{T}$. Par identification dans $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}$, $\gamma = \frac{1}{\text{ch}^2(t)}$.

Interprétation cinématique

La variable t représentant le temps, on appelle \vec{V} et $\vec{\Gamma}$ les vecteurs vitesse et accélération du mouvement le long de (C) correspondant à $M(t)$, v sa vitesse *numérique*, $\gamma_{\vec{T}}$ et $\gamma_{\vec{N}}$ les accélérations tangentielle et normale : alors

$$\vec{V} = \vec{M}'(t) = v\vec{T} \text{ et } \vec{\Gamma} = \vec{M}''(t) \frac{dM}{dt^2} = \gamma_{\vec{T}} + \gamma_{\vec{N}} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}. \text{ (On obtient alors } R = \frac{v^3}{\det(\vec{V}, \vec{\Gamma})}\text{)}$$



\vec{T}, \vec{N} et γ_N le long d'une courbe

Propriété 2 : expression de la courbure

Soit α l'angle entre \vec{i} et \vec{T} ;

Alors $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$. Ainsi $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N}$, donc par identification : $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$

Exemple 10

Reprenons à nouveau la cycloïde déjà traitée dans les exemples 7 et 8. Par identification dans $\vec{T} = \sin \frac{t}{2} \vec{i} + \cos \frac{t}{2} \vec{j}$, on trouve $\begin{cases} \cos \alpha = \sin \frac{t}{2} \\ \sin \alpha = \cos \frac{t}{2} \end{cases}$ soit $\alpha = \frac{\pi - t}{2}$. On retrouve $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{-1}{4 \sin(\frac{t}{2})}$.

Méthode 5 : détermination de la courbure

Méthode 1 : On détermine $\frac{ds}{dt}$ et la base de Frenet (\vec{T}, \vec{N}) ; on en déduit $\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{N}}{dt}$, ce qui permet d'obtenir γ par identification dans la formule $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}$ (cf les exemples 9 et 8).

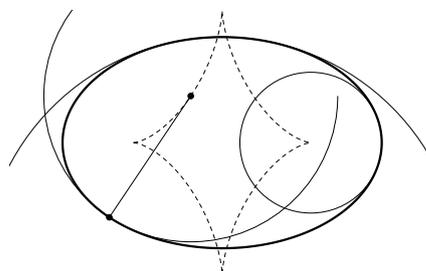
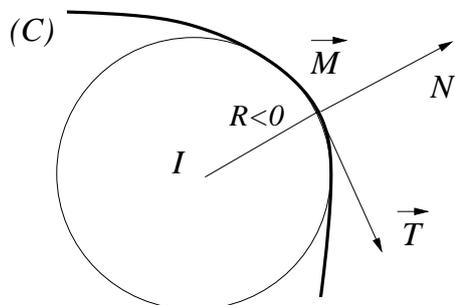
Méthode 2 : On détermine $\frac{ds}{dt}$ et le vecteur tangent \vec{T} . Si, par chance, on peut en tirer par relèvement une valeur simple de α , on en déduit la courbure par utilisation de la formule $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$ (cf l'exemple 10).

2.3 – Centre de courbure, cercle de courbure

Définition : centre et cercle de courbure

En tout point birégulier M, le centre de courbure I est défini par $\overrightarrow{MI} = R\vec{N}$

Le centre de courbure est sur la normale à (C) passant par M, « vers l'intérieur de la courbure »; il est le centre d'un cercle de rayon R, qui est parmi les cercles tangents à (C) en M, celui qui est le plus proche de (C) (ce cercle est appelé **cercle de courbure** ou **cercle osculateur à (C) en M**).



\vec{T}, \vec{N} , rayon, centre et cercle de courbure

Une ellipse, sa développée, et deux cercles osculateurs

Méthode 6 : détermination du centre de courbure

On peut déterminer les coordonnées x_I et y_I du centre de courbure

- À l'aide de $\overrightarrow{OI} = M + R\vec{N}$ (méthode standard)
- En déterminant l'enveloppe des normales (voir plus bas).

Exemple 11

Soit $a > 0$, et la chaînette paramétrée par $(x(t), y(t)) = (at, a \operatorname{ch}(t))$, $a > 0$.

méthode **1** : $I = M + R\vec{N}$.

$$\vec{M}'(t) = a\vec{i} + a \operatorname{sh}(t)\vec{j} \text{ donc } \|\vec{M}'(t)\|^2 = a^2(1 + \operatorname{sh}^2(t)) = a^2 \operatorname{ch}^2(t).$$

On en déduit la base de Frenet : $\vec{T} = \frac{1}{a \operatorname{ch}(t)} \vec{M}'(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \vec{i} + \operatorname{th}(t)\vec{j}$ et $\vec{N} = -\operatorname{th}(t)\vec{i} + \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\vec{j}$.

Alors $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{a \operatorname{ch}(t)} \left(\frac{-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2(t)} \vec{i} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \vec{j} \right)$ Alors $\frac{d\vec{T}}{ds} = C \cdot \vec{N} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2(t)} \vec{N}$ et $R = a \operatorname{ch}^2(t)$ par identification.

Finalement $I = M + R\vec{N} = at\vec{i} + a \operatorname{ch}(t)\vec{j} + a \operatorname{ch}^2(t) \left(-\operatorname{th}(t)\vec{i} + \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\vec{j} \right)$. $I = a \left((t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t)\vec{i} + 2 \operatorname{ch}(t)\vec{j} \right)$

Exemple 12

Reprenons une nouvelle fois la cycloïde de paramétrage $(x(t), y(t)) = (1 - \cos t, \sin t)$ (cf. exemples 8 et 7).

$$\text{Alors } \vec{OI} = \vec{OM} + RN = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} - 4 \sin \frac{t}{2} \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin t + 2 \sin t \\ 1 - \cos t - 2(1 - \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ -(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que $\vec{OI}(t + \pi) = \begin{pmatrix} \pi + t + \sin(\pi + t) \\ -1 + \cos(\pi + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{OM}(t)$,

donc le centre de courbure associé à $M(t)$ est l'image de $M(t)$ par une translation de vecteur $\pi\vec{i} + 2\vec{j}$.

3 — Enveloppe d'une famille de droites

Définition : enveloppe

L'arc \mathcal{E} est l'**enveloppe de la famille de droites** $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ si toutes les droites \mathcal{D}_t sont tangentes à \mathcal{E} en un point $A(t)$ (appelé le **point caractéristique de \mathcal{E}**).

Soit C un arc (ou courbe) paramétré(e) défini(e) par $M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, où x et y sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} ; pour tout $t \in I$, on note $\vec{M}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$, et on rappelle que C admet en tout point régulier $M(t_0)$ une tangente d'équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad y'(t_0) \cdot x - x'(t_0) \cdot y = y'(t_0) \cdot x(t_0) - x'(t_0) \cdot y(t_0).$$



Méthode 7 : détermination du paramétrage de l'enveloppe

Pour tout $t \in I$, \mathcal{D}_t est définie par la donnée d'un de ses points $M(t)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}(t) \neq \vec{0}$.

Alors le point caractéristique qui décrit l'enveloppe \mathcal{E} est défini par $A(t) = M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$, où $\vec{A}'(t)$ dirige la droite \mathcal{D}_t , c'est-à-dire $(\star) : \det(\vec{A}'(t), \vec{u}(t)) = 0$.

Or $\vec{A}'(t) = \vec{M}'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t)$, donc $\det(\vec{A}'(t), \vec{u}(t)) = \det(\vec{M}'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t)) + \lambda(t) \det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))$, donc la condition (\star) devient

$\lambda(t) \det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = -\det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t))$, soit si $\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) \neq 0$:

$$\lambda(t) = -\frac{\det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))}.$$

Exemple 13

On considère la famille de droites du plan caractérisées \mathcal{D}_t par un point $M(t) : \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$ et un vecteur : $\vec{u}(t) : \begin{pmatrix} -2t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } \vec{M}'(t) : \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}(t) : \begin{pmatrix} -2t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}, \text{ donc } \det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} -2 & -2t \\ 2t & 1+t^2 \end{vmatrix} =$$

$$-2(1 - t^2), \text{ et } \det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} 0 & -2t \\ -1 & 1+t^2 \end{vmatrix} = 2t, \text{ donc,}$$

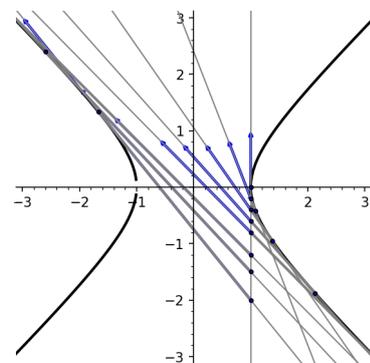
lorsque t décrit un des intervalles : $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$, $] 1, +\infty[$,

$$\lambda(t) = \frac{-2t}{2(1 - t^2)} = \frac{t}{t^2 - 1}; \text{ on retrouve ainsi les coordonnées de}$$

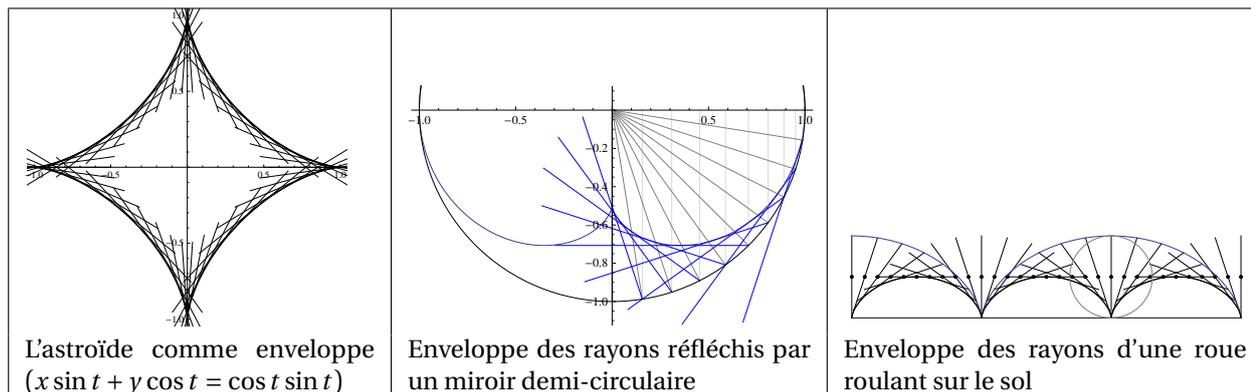
$$A(t) = M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) : \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1-t^2 \\ -2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Remarquons que } x^2 - y^2 = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^2 - \left(\frac{-2t}{1-t^2} \right)^2 = \frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{(1-t^2)^2} = 1;$$

l'enveloppe des droites est incluse dans une hyperbole.



Exemple 13 : l'enveloppe des droites \mathcal{D}_t est une hyperbole.



L'astroïde comme enveloppe
($x \sin t + y \cos t = \cos t \sin t$)

Enveloppe des rayons réfléchis par un miroir demi-circulaire

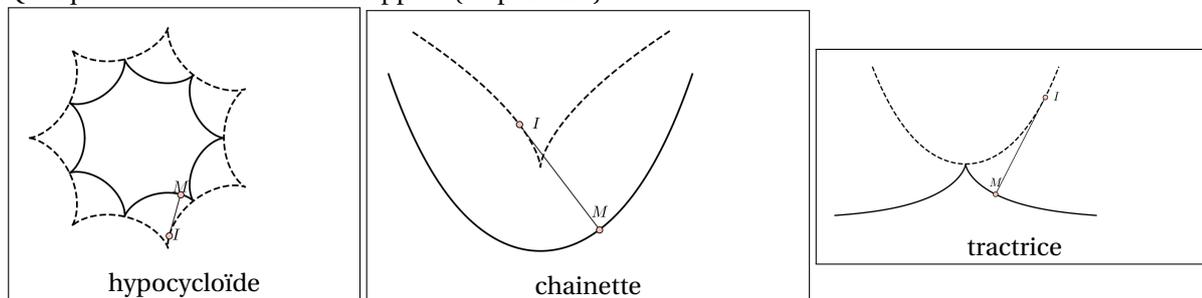
Enveloppe des rayons d'une roue roulant sur le sol

4 — Développée d'une courbe plane

Définition : développée

La **développée** d'un arc birégulier (C) est le lieu de ses centres de courbure.

Quelques courbes et leurs développées (en pointillé) :



hypocycloïde

chainette

tractrice

4.1 – Détermination pratique

On peut déterminer une paramétrisation de la développée

- ★ soit en utilisant la méthode 6,
- ★ soit en utilisant la propriété : (DEN) La développée (D) de (C) est l'enveloppe des normales de (C).

Exemple 14

Reprenons à nouveau l'exemple de la cycloïde \mathcal{C} (cf 7). $\vec{M}(t) : \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in]0, 2\pi[$.

$\vec{M}'(t) : \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, 2\pi[$; la normale à \mathcal{C} en $M(t)$ est donc dirigée par $\vec{u}(t) : \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

On détermine l'enveloppe des normales par la **méthode 7** :

$$\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} -\cos t & -\sin t \\ \sin t & 1 - \cos t \end{vmatrix} = -\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 1 - \cos t > 0;$$

$$\det(\vec{M}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} 1 - \cos t & -\sin t \\ \sin t & 1 - \cos t \end{vmatrix} = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 - \cos t), \text{ donc } \lambda(t) = -2, \text{ et}$$

$$I(t) = A(t) = M(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) = M(t) - 2\vec{u}(t) : \begin{pmatrix} t + \sin t \\ -1 + \cos t \end{pmatrix}, \text{ ce qui confirme les formules ci-dessus (exemple 12).}$$

