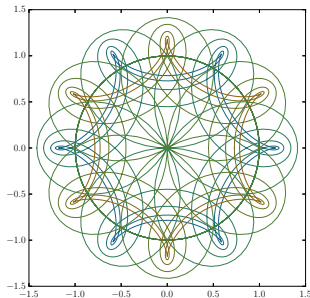
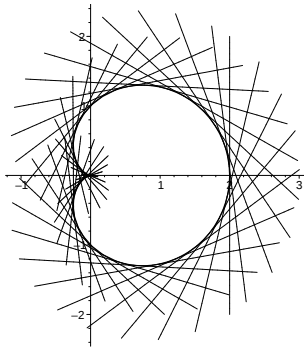


Chapitre 5

Arcs paramétrés



Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.1 — Définitions

arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$

Un **arc paramétré** de classe $\mathcal{C}^k$ est la donnée d'un couple $(I, \vec{f})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{f}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$.

support géométrique

Soit γ un arc paramétré de $\mathcal{C}^k$, le **support géométrique** de γ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $f(t)$ pour $t \in I$.

1.1 — À propose des définitions

remarque

la notion d'**arc paramétré** est analogue à celle de mouvement en physique ; elle se distingue de celle de **support géométrique**, qui est l'analogue de la trajectoire.

Le terme de **courbe** est ambigu et peut désigner l'arc paramétré comme son support géométrique.

Un même support correspond à une infinité d'arcs paramétrés, par exemple les deux arcs suivants définissent un cercle privé d'un point :

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos \theta \\ y(\theta) = \sin \theta \end{cases}, \theta \in]-\pi, \pi[\text{ et } \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}, t \in]-\infty, \infty[$$

1.1 — Point régulier

Définition : point régulier

Soit (I, f) un arc paramétré plan de classe $\mathcal{C}^1$, et $M(t)$ le point du plan de coordonnées $\vec{f}(t)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que $M(t_0)$ est un **point régulier** lorsque $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$.

Un point non régulier est dit **singulier** ou **stationnaire**.

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

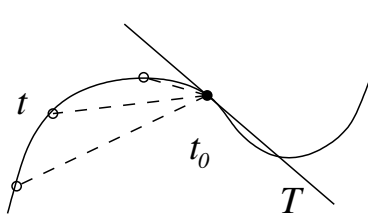
1.1 — Point régulier, tangente

Propriété : tangente en un point régulier

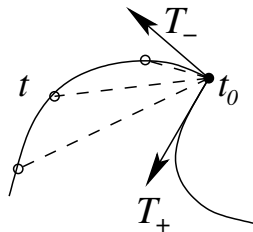
Soit $M(t_0)$ un point régulier d'un arc paramétré plan de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors, la tangente en $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ et de direction $\vec{f}'(t_0)$.

Autrement dit, elle est la droite paramétrée par un DL1 de f en $t_0 : h \mapsto \vec{f}(t_0) + h \cdot \vec{f}'(t_0)$.



tangente en $M(t_0)$



deux demi-tangentes en $M(t_0)$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.2 — Méthode : étude des symétries d'un arc paramétré

Soit (C) un arc paramétré, défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y , définies de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Lorsque x et y présentent **simultanément** une des propriétés suivantes :

parité ($f(t) = f(-t)$) ; imparité ($-f(t) = f(-t)$) ; symétrie ($f(t) = f(a - t)$) ; périodicité ($f(t + a) = f(t)$),
on peut réduire l'intervalle d'étude à $I \subset \mathbb{R}_+$ (parité et imparité), $I \subset [a, +\infty[$ (symétrie), $I \subset [t_0, t_0 + a]$ (périodicité),
puis compléter le tracé de la courbe par une transformation géométrique.

voir à ce sujet les exemples 1,2 et 3.

Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.2 — Méthode : étude des points singuliers

Soit (C) un arc paramétré, défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y , et $M(t_0)$ un **point singulier** de (C) , c'est-à-dire que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.

On veut déterminer l'allure de (C) autour de $M(t_0)$.

on suppose qu'il existe deux entiers p et q tels que $q > p > 1$, et que :

$\overrightarrow{F'}(t_0) = \dots = \overrightarrow{F^{(p-1)}}(t_0) = 0$ et $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) \neq 0$,
 $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \dots, \overrightarrow{F^{(q-1)}}(t_0)$ sont colinéaires et $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$ ne sont pas colinéaires.

Alors (C) a autour de $M(t_0)$ la même nature que la courbe paramétrée dans le repère $(M(t_0); \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0))$ par $x(t) = t^p, y(t) = t^q$, c'est-à-dire :

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

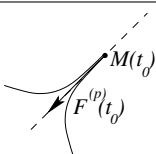
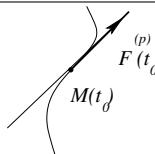
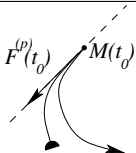
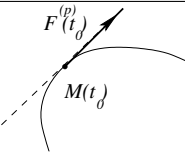
Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.2 — Méthode : étude des points singuliers

(C) a autour de $M(t_0)$ la même nature que la courbe paramétrée dans le repère $(M(t_0); \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0), \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0))$ par $x(t) = t^p, y(t) = t^q$, c'est-à-dire :

	p pair	p impair
q impair	 reb. 1^{ère} espèce	 inflexion
q pair	 reb. 2^{ème} espèce	 ordinaire

Étude d'une courbe paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés métriques d'une courbe plane

longueur, abscisse curviligne

repère de Frenet, courbure

Centre de courbure, cercle de courbure

Enveloppe d'une famille de droites

Développée d'une courbe plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.2 — Méthode : étude des points singuliers

En pratique, pour trouver p et q , on utilise un développement limité en parallèle de x et y :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t_0 + h) \\ y(t_0 + h) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{h^p}{p!} \begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix} \\ &\quad + \cdots + \frac{h^q}{q!} \begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^{q+1}) \\ o(h^{q+1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui fournit un vecteur directeur de la tangente et la nature du point.

voir à ce sujet les exemples 2 et 4.

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.2 — Méthode : étude des branches infinies d'un arc paramétré

Soit (C) un arc paramétré, défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y .

On cherche à déterminer la nature des **branches infinies** de (C) , qui peuvent se présenter lorsque $\|\overrightarrow{OM}(t)\|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers t_0 , ou bien lorsque t tend vers $\pm\infty$.

Dans le premier cas ($\|\overrightarrow{OM}(t)\|$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers t_0), on étudie successivement les cas suivants (non exhaustifs, mais suffisants dans le cadre du programme) :

Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.2 — Méthode : étude des branches infinies d'un arc paramétré

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$: asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
2. $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$: asymptote verticale d'équation $x = \ell$.
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$.
 - 3.1 $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R}^*$: branche infinie d'axe $y = \ell$.
 - 3.1.1 $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - m x(t) = p \in \mathbb{R}$: asymptote oblique d'équation $y = m x + p$.
 - 3.1.2 $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - m x(t) = \pm\infty \in \mathbb{R}$: branche parabolique d'équation $y = m x + p$.

voir à ce sujet l'exemple 3.

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.3 — Exemple 1 : une courbe de Lissajous

$$(x(t), y(t)) = (\cos(2t), \sin(3t))$$

1. Étude des symétries

- * x et y sont 2π -périodiques : la courbe est fermée. On peut l'étudier sur $[-\pi; \pi]$.
- * x est pair, y est impair : la courbe est symétrique par rapport à l'axe $y = 0$. On ramène l'étude à $[0, \pi]$.
- * $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$: la courbe est parcourue deux fois sur $[0, \pi]$. On ramène l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

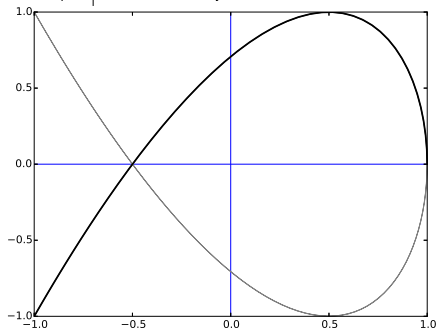
$$(x(t), y(t)) = (\cos(2t), \sin(3t))$$

2. Tableau de variations

$(x'(t), y'(t)) = (-2\sin(2t), 3\cos(3t))$, d'où le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	-	$-\sqrt{3}$	-	0
$y'(t)$	3	+	0	-	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

— sur $[0, \pi/2]$ | — $x(t)=\cos(2t), y(t)=\sin(3t)$



1.3 — Exemple 2 : la chaînette

$$(x(t), y(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

1. Étude des symétries

- * x est pair, y est impair : la courbe est symétrique par rapport à la droite $y = 0$. On ramène l'étude à $\mathbb{R}_+$.
- * $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$: la courbe est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$. On peut l'étudier sur $[0; \pi]$.

$(x'(t), y'(t)) = (1 - \cos(t), \sin(t))$, d'où le tableau :

Étude d'une courbe paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés métriques d'une courbe plane

longueur, abscisse curviligne

repère de Frenet, courbure

Centre de courbure, cercle de courbure

Enveloppe d'une famille de droites

Développée d'une courbe plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

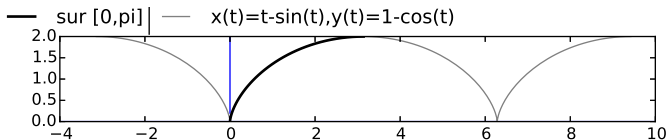
Méthodes et propriétés

1.3 — Exemple 2 : la chaînette

$$(x(t), y(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

2. Tableau de variations

t	0		π
$x'(t)$	0	+	2
$y'(t)$	0	+	1
$x(t)$	0	$\nearrow$	π
$y(t)$	0	$\nearrow$	2



1.3 — Exemple 2 : la chaînette

$$(x(t), y(t)) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

3. Étude du point singulier en 0

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + o(t^4) \text{ et } y(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + o(t^4), \text{ soit}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}, \text{ donc } p = 2 \text{ et } q = 3$$

Il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce, de tangente **verticale**.

1.3 — Exemple 3

$$(x(t), y(t)) = \left(t^2 + t^4, 1 - t^2 - \frac{t^5}{2} \right)$$

1. Étude des symétries

Cet arc ne présente *a priori* pas de symétrie remarquable.

Néanmoins, on peut, avec une grosse pincée d'intuition ou une indication externe, remarquer que

$$(x(2-t), y(2-t)) = \left(\frac{(2-t)^2}{-1+t}, 1 + 2(2-t) \right) = \left(\frac{(-2+t)^2}{t-1}, 5-2t \right)$$

et donc

$$(x(2-t), y(2-t)) + (x(t), y(t)) = (-4, 6).$$

La courbe est donc invariante par symétrie axiale de centre $C : (-2, 3)$, et on peut l'étudier sur $]1, +\infty[$.

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.3 — Exemple 3

$$(x(t), y(t)) = \left(t^2 + t^4, 1 - t^2 - \frac{t^5}{2} \right)$$

2. Tableau de variations

t	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$x(t)$	$+\infty \searrow$	$0 \nearrow$	$+\infty \parallel$	$-\infty \nearrow$	$-4 \searrow$	$-\infty$	
$y(t)$	$-\infty \nearrow$	$1 \nearrow$	3	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe planelongueur, abscisse
curvilignerepère de Frenet,
courbureCentre de
courbure, cercle de
courbureEnveloppe d'une
famille de droitesDéveloppée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

$$(x(t), y(t)) = \left(t^2 + t^4, 1 - t^2 - \frac{t^5}{2} \right)$$

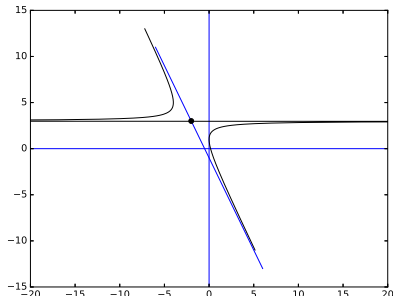
La courbe présente une asymptote horizontale en $t = 1$, d'équation $y = 3$.

Quand $t \rightarrow \pm\infty$, $x(t)^2 + y(t)^2 \rightarrow +\infty$, et

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(1-t)(2t+1)}{t^2} \sim \frac{2t^2}{-t^2} \rightarrow -2.$$

$$\text{Par ailleurs } y(t) + 2x(t) = 1 + 2t + \frac{2t^2}{1-t} = \frac{1+t}{1-t} \rightarrow -1$$

Donc la courbe présente en $t \rightarrow \pm\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = -2x - 1$.



Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

1.3 — Exemple 4

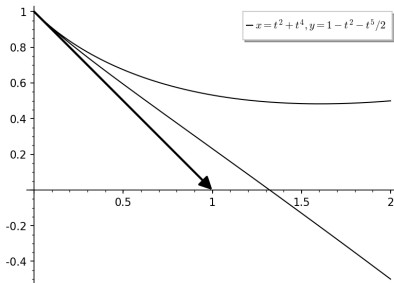
$$(x(t), y(t)) = \left(t^2 + t^4, 1 - t^2 - \frac{t^5}{2} \right)$$

Étude de(s) point(s) singulier(s)

$x'(t) = 3t + 4t^3 = t(3 + t^2)$ donc x' ne s'annule qu'en 0 ; comme $y'(0) = 0$, il n'y a qu'un point singulier en 0.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t) \\ o(t) \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$p = 2, q = 4$; $M(0)$ est un point d'inflexion de deuxième espèce, de tangente dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

2.1 — longueur d'un arc paramétré

définition : longueur d'un arc paramétré

Soit $(C) = ([a, b], f)$ un arc paramétré plan *régulier* de classe $\mathcal{C}^1$, alors **la longueur de (C)** est l'intégrale

$$\ell = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Si (C) est défini par deux fonctions composantes appelées ici x et y , alors $\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$;

Si (C) est défini par une équation cartésienne $y = g(x)$, alors $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$.

voir à ce sujet les exemples 5 et 6

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

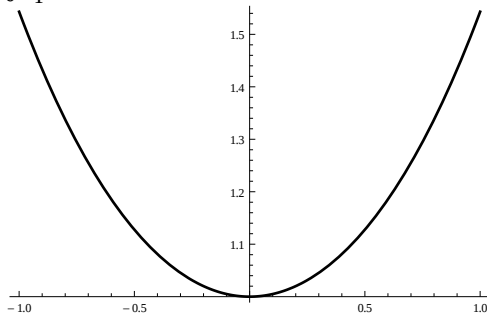
Méthodes et propriétés

2.1 — Exemple 5 : longueur de la chaînette

$y = \text{ch}(x)$ sur $[-1, 1]$

Cet arc (dont le support est appelé **chaînette**) est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$\sqrt{1 + g'(x)^2} = \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)} = \text{ch}(x)$ donc la longueur de l'arc est

$$\int_{-1}^1 \text{ch}(x) dx = [\text{sh}(x)]_{-1}^1 = 2 \text{sh}(1).$$


2.1 — Exemple 6 : longueur du cercle

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \text{ sur } [0, 2\pi]$$

On reconnaît le cercle unité, bien sûr de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\|f'(t)\|^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \text{ donc}$$

$$\int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

définition : abscisse curviligne

Soit (C) un arc de classe C^1 , et défini par une représentation paramétrique cartésienne : $\{(x(t), y(t)), t \in I\}$:

$$M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

On choisit sur cet arc (C) une origine M_0 , correspondant à une valeur t_0 du paramètre.

L' **abscisse curviligne** s est la fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en M_0 et qui vérifie

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{dM}{dt} \right\| = \|M'(t)\|$$

c'est-à-dire

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|M'(u)\| du = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du$$

!

Le signe de l'abscisse curviligne correspond à l'orientation de la courbe (le « sens de parcours »), et sa valeur absolue est la longueur de l'arc $M_0M(t)$.

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe planelongueur, abscisse
curvilignerepère de Frenet,
courbureCentre de
courbure, cercle de
courbureEnveloppe d'une
famille de droitesDéveloppée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

On suppose à partir de maintenant que l'arc (C) est régulier, c'est-à-dire sans point singulier.

Alors s est une fonction de classe C^1 et bijective de I dans $\mathbb{R}$, donc est un **paramétrage admissible** de (C) .

On peut donc **rectifier** (C) , c'est-à-dire le paramétrer par s .

2.2 — repère de FRENET

$\vec{T} = M'(s)$ est le vecteur tangent unitaire en $M(s)$, dirigé « dans le sens du mouvement », c'est-à-dire suivant les valeurs croissantes de s ;

on définit d'autre part $\vec{N}$ comme l'image de $\vec{T}$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Le repère orthonormé $(M(s); \vec{T}, \vec{N})$ est appelé **repère de Frenet**.



On peut utiliser la propriété suivante : soit $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ un vecteur unitaire (ie de norme 1), alors $\vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ est l'image de $\vec{u}$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 7 : repère de Frenet de la cycloïde

1. $M'(t) = (1 - \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j}$.

2. $\|M'(t)\|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

Les points singuliers de la courbe vérifient $\frac{t}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ce sont des points de rebroussement de première espèce. Sur l'intervalle $]0, 2\pi[$, $s'(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$

3. En choisissant $t = 0$ comme origine des abscisses

curvilignes : $s(t) = \left[-4\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]_0^t = 4 - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

La longueur de l'arche correspondante à $]0, 2\pi[$ est $s(2\pi) = 8$.

4. En divisant $M'(t)$ par sa norme sur $]0, 2\pi[$, on obtient successivement :

$$\vec{T} = \frac{1}{s'(t)}M'(t) = \sin\frac{t}{2}\vec{i} + \cos\frac{t}{2}\vec{j} \text{ et alors } \vec{N} = -\cos\frac{t}{2}\vec{i} + \sin\frac{t}{2}\vec{j}$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe planelongueur, abscisse
curvilignerepère de Frenet,
courbureCentre de
courbure, cercle de
courbureEnveloppe d'une
famille de droitesDéveloppée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés



On suppose à partir de maintenant que l'arc (C) est de classe C^2

définition : courbure

La **courbure** de (C) au point $M(s)$ est le réel γ tel que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \cdot \vec{N}$$

Alors $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}$.

En effet, $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$ donc par dérivation : $\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{N} + \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = 0$.

Le **rayon de courbure** R est l'inverse de la courbure ; il est considéré comme infini (sans signe !) si la courbure est nulle, et réciproquement.

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

Exemple 8 : courbure de la cycloïde

Reprenons l'exemple 7.

Nous avons vu que $\frac{ds}{dt} = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, $\vec{T} = \sin \frac{t}{2} \vec{i} + \cos \frac{t}{2} \vec{j}$ et

$$\vec{N} = -\cos \frac{t}{2} \vec{i} + \sin \frac{t}{2} \vec{j}.$$

$$\text{Alors } \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{1}{2} \left(\sin \frac{t}{2} \vec{i} + \cos \frac{t}{2} \vec{j} \right) = \frac{1}{4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \vec{T}.$$

$$\text{Par identification dans } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}, \quad \gamma = \frac{-1}{4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

Exemple 9 : courbure de la chaînette

Reprenons l'exemple 5 : l'abscisse curviligne de la chaînette d'équation cartésienne $y = \text{ch}(x)$, d'origine $x = 0$, est $\text{sh}(x)$. Paramétrons cette chaînette en posant $(x(t), y(t)) = (t, \text{ch}(t))$,

alors $\frac{ds}{dt} = \text{ch}(t)$, et $\vec{M}'(t) = \vec{i} + \text{sh}(t)\vec{j}$, donc

$$\vec{T} = \frac{1}{\text{ch}(t)}\vec{i} + \text{th}(t)\vec{j} \text{ et } \vec{N} = -\text{th}(t)\vec{i} + \frac{1}{\text{ch}(t)}\vec{j}.$$

$$\text{Alors } \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{N}}{dt} = \frac{1}{\text{ch}(t)} \left(\frac{-1}{\text{ch}^2(t)}\vec{i} - \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}\vec{j} \right) = \frac{-1}{\text{ch}^2(t)}\vec{T}.$$

$$\text{Par identification dans } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}, \quad \gamma = \frac{1}{\text{ch}^2(t)}.$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

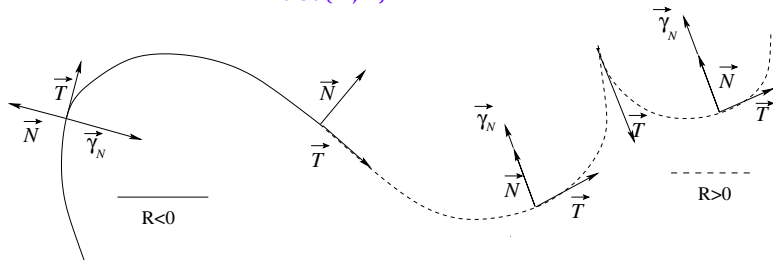
Méthodes et propriétés

2.2 — Interprétation cinématique

La variable t représentant le temps, on appelle $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ les vecteurs vitesse et accélération du mouvement le long de (C) correspondant à $M(t)$, v sa vitesse *numérique*, $\gamma_{\vec{T}}$ et $\gamma_{\vec{N}}$ les accélérations tangentielle et normale : alors

$$\vec{V} = M'(t) = v\vec{T} \text{ et } \vec{\Gamma} = M''(t) = \frac{d^2M}{dt^2} = \gamma_{\vec{T}} + \gamma_{\vec{N}} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}.$$

(On obtient alors $R = \frac{v^3}{\det(\vec{V}, \vec{\Gamma})}$)



$\vec{T}, \vec{N}$ et γ_N le long d'une courbe

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

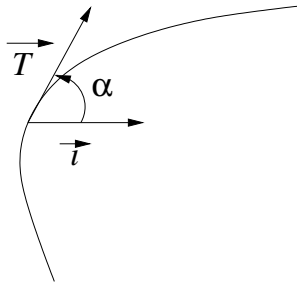
Exemples

Méthodes et propriétés

2.2 — Théorème du relèvement

Soit $t \mapsto M(t)$ une courbe de classe $\mathcal{C}^2$,
il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}.$$



Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

2.2 — Propriété 2 : expression de la courbure

Soit α l'angle entre $\vec{t}$ et $\vec{T}$;

Alors $\vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Alors $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N}$, donc par identification :

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$$

exemple 10 : courbure de la cycloïde avec α

Reprenons à nouveau la cycloïde déjà traitée dans les exemples 7 et 8.

Par identification dans $\vec{T} = \sin \frac{t}{2} \vec{i} + \cos \frac{t}{2} \vec{j}$, on trouve

$$\begin{cases} \cos \alpha = \sin \frac{t}{2} \\ \sin \alpha = \cos \frac{t}{2} \end{cases} \quad \text{soit } \alpha = \frac{\pi - t}{2}.$$

$$\text{On retrouve } \gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{-1}{4 \sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

2.2 — Méthode : détermination de la courbure

Méthode 1 : On détermine $\frac{ds}{dt}$ et la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$;
 on en déduit $\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{N}}{dt}$, ce qui permet d'obtenir γ par
 identification dans la formule $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \cdot \vec{T}$ (cf les exemples 8
 et 9).

Méthode 2 : On détermine $\frac{ds}{dt}$ et le vecteur tangent $\vec{T}$. Si,
par chance, on peut en tirer par relèvement une valeur simple
 de α , on en déduit la courbure par utilisation de la formule
 $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$ (cf l'exemple 10).

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe planelongueur, abscisse
curvilignerepère de Frenet,
courbureCentre de
courbure, cercle de
courbureEnveloppe d'une
famille de droitesDéveloppée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

2.3 — Définition : cercle et centre de courbure

Définition : cercle et centre de courbure

En tout point birégulier M , le **centre de courbure** I est défini par $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$.

Le centre de courbure est sur la normale à (C) passant par M , « vers l'intérieur de la courbure » ;
il est le centre d'un cercle de rayon R , qui est parmi les cercles tangents à (C) en M , celui qui est le plus proche de (C) (ce cercle est appelé **cercle de courbure** ou **cercle osculateur à (C) en M**).

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe planelongueur, abscisse
curvilignerepère de Frenet,
courbureCentre de
courbure, cercle de
courbureEnveloppe d'une
famille de droitesDéveloppée
d'une courbe
plane

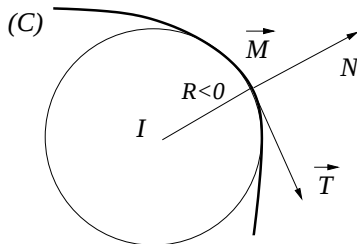
Détermination pratique

Résumé

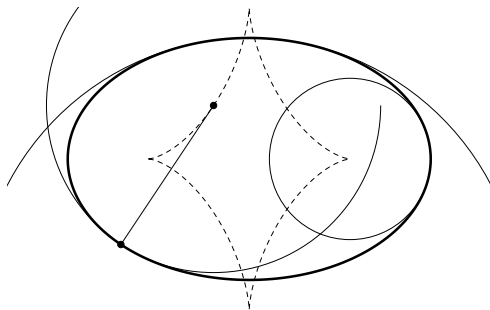
Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés



$\vec{T}$, $\vec{N}$, rayon, centre et cercle de courbure



Une ellipse, sa développée, et trois cercles osculateurs

2.3 — Méthode : détermination du centre de courbure

On détermine les coordonnées x_I et y_I du centre de courbure à l'aide de $\overrightarrow{OI} = M + R\vec{N}$.

1. Si le repère de Frenet est déterminé préalablement, la courbure γ peut être calculée par identification dans la

formule $\frac{dt}{ds} \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$ ou directement dans

$$\gamma = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{N}.$$

2. Si l'angle α admet une expression simple, alors

$$R = \frac{ds}{d\alpha} \text{ et } \vec{N} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

exemple 11 : centre de courbure de la chaînette.

Soit $a > 0$, et la chaînette paramétrée par

$$(x(t), y(t)) = (at, a \operatorname{ch}(t)), \quad a > 0.$$

$$\vec{M}'(t) = a\vec{i} + a \operatorname{sh}(t)\vec{j} \text{ donc}$$

$$\|\vec{M}'(t)\|^2 = a^2 (1 + \operatorname{sh}^2(t)) = a^2 \operatorname{ch}^2(t).$$

On en déduit la base de Frenet :

$$\vec{T} = \frac{1}{a \operatorname{ch}(t)} \vec{M}'(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \vec{i} + \operatorname{th}(t) \vec{j} \text{ et } \vec{N} = -\operatorname{th}(t) \vec{i} + \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \vec{j}.$$

$$\text{Alors } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{1}{a \operatorname{ch}(t)} \left(\frac{-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2(t)} \vec{i} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \vec{j} \right).$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = C \cdot \vec{N} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2(t)} \vec{N} \text{ et } R = a \operatorname{ch}^2(t) \text{ par identification.}$$

Finalement

$$I = M + R\vec{N} = at\vec{i} + a \operatorname{ch}(t)\vec{j} + a \operatorname{ch}^2(t) \left(-\operatorname{th}(t)\vec{i} + \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \vec{j} \right).$$

$$I = a \left((t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t) \vec{i} + 2 \operatorname{ch}(t) \vec{j} \right)$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

exemple 12 : centre de courbure de la cycloïde avec α .

Reprenons à nouveau la cycloïde déjà traitée dans les exemples 7, 8 et 10

On sait que $\frac{ds}{dt} = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$, $\alpha = \frac{\pi - t}{2}$, $\vec{T} = \sin \frac{t}{2} \vec{i} + \cos \frac{t}{2} \vec{j}$ et $\vec{N} = -\cos \frac{t}{2} \vec{i} + \sin \frac{t}{2} \vec{j}$.

De plus $R = \frac{1}{\gamma} = \frac{dt}{d\alpha} \frac{ds}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$.

Alors $R \vec{N} = 4 \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \vec{i} - \sin^2 \frac{t}{2} \vec{j} = 2 \sin t \vec{i} - 2(1 - \cos t) \vec{j}$;
comme $M(t) = (t - \sin t) \vec{i} + (1 - \cos t) \vec{j}$,

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R \vec{N} = \begin{pmatrix} t - \sin t + 2 \sin t \\ 1 - \cos t - 2(1 - \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \sin t \\ -(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que

$$\overrightarrow{OI}(t + \pi) = \begin{pmatrix} \pi + t + \sin(\pi + t) \\ -1 + \cos(\pi + t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix} + \overrightarrow{OM}(t),$$

donc le centre de courbure associé à $M(t)$ est l'image de $M(t)$ par une translation de vecteur $\pi \vec{i} + 2 \vec{j}$.

3.0 — Introduction

Soit C un arc (ou courbe) paramétré(e) défini(e) par $M(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, où x et y sont deux fonctions de classe C^1 de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; pour tout $t \in I$, on note $\vec{M}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$

Un point régulier de C est un point $M(t_0)$ tel que $\vec{M}'(t_0) \neq \vec{0}$.

La courbe C admet en tout point *régulier* $M(t_0)$ une tangente d'équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \text{ c'est-à-dire}$$

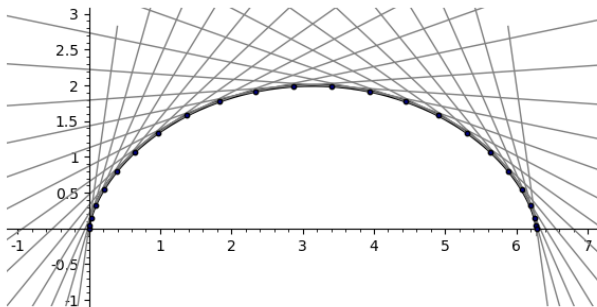
$$y'(t_0).x - x'(t_0).y = y'(t_0).x(t_0) - x'(t_0).y(t_0).$$

Une famille de droites est une application qui à $t \in I \subset \mathbb{R}$, associe l'équation $D_t: \quad a(t)x + b(t)y = c(t)$.

définition : enveloppe d'une famille de droites

On suppose que a, b, c sont des fonctions de classe C^1 sur I et que $ab' - ba'$ ne s'annule pas sur I .

L'arc E est **l'enveloppe de la famille de droites D_t** si toutes les droites D_t sont tangentes à E en un point $P(t)$ (appelé **le point caractéristique de E**).



$$x \sin(t) * x + y(\cos(t) - 1) + 2 - 2 \cos(t) - t \sin(t) = 0$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

3.0 — Méthode : paramétrage de l'enveloppe

Les coordonnées de $P(t)$ sont $(x(t), y(t))$, unique solution du système

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y &= c(t) \\ a'(t)x + b'(t)y &= c'(t) \end{cases}$$

Il suffit donc de résoudre de système de Cramer pour déterminer une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de l'enveloppe de la famille de droites, définie comme le lieu des points caractéristiques $P(t), t \in I$.

Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

exemple 13 : enveloppe de droites

On considère la famille de droites du plan d'équations cartésiennes :

$$E_t : (1+t^2)x + 2ty = 1-t^2$$

Le système à résoudre est :
$$\begin{cases} (1+t^2)x + 2ty = 1-t^2 \\ 2tx + 2y = -2t \end{cases}$$
 de

$$\text{déterminant } \begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ 2t & 2 \end{vmatrix} = 2(1-t^2).$$

Sur chacun des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $] 1, +\infty[$, on trouve

$$x = \frac{1}{2(1-t^2)} \begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 2 \end{vmatrix} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$\text{et } y = \frac{1}{2(1-t^2)} \begin{vmatrix} 1+t^2 & 1-t^2 \\ 2t & -2t \end{vmatrix} = \frac{-2t}{1-t^2}.$$

Finalement un paramétrage de l'enveloppe est

$$\left(x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, y = \frac{-2t}{1-t^2} \right).$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

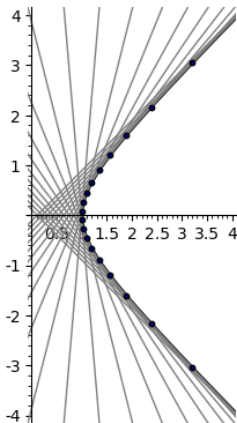
Méthodes et propriétés

exemple 13 : enveloppe de droites

$$E_t : (1 + t^2)x + 2ty = 1 - t^2$$

Un paramétrage de
l'enveloppe est

$$\begin{cases} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = \frac{-2t}{1-t^2} \end{cases}$$



Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

3.0 — Quelques enveloppes

Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

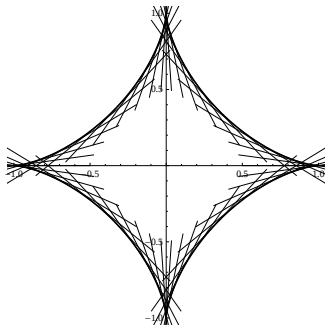
Détermination pratique

Résumé

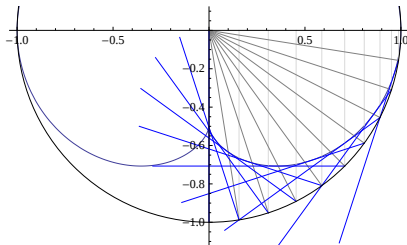
Vocabulaire

Exemples

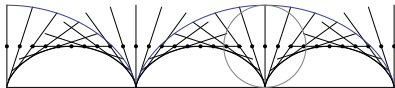
Méthodes et propriétés



L'astroïde comme enveloppe
($x \sin t + y \cos t = \cos t \sin t$)



Enveloppe des rayons réfléchis
par un miroir demi-circulaire

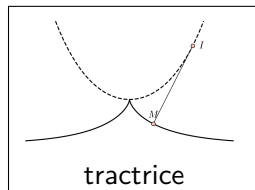
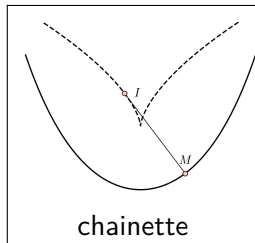
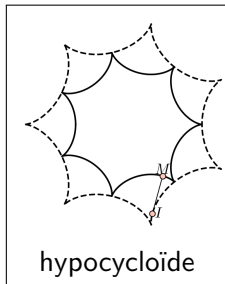


Enveloppe des rayons d'une roue roulant sur le sol

définition : développée d'un arc paramétré

La **développée** d'un arc birégulier (C) est le lieu de ses centres de courbure.

Quelques exemples



Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

4.1 — Détermination pratique

On peut déterminer une paramétrisation de la développée

★ soit en utilisant la méthode [méthode 5](#),

★ soit en utilisant la propriété suivante :

(DEN) La développée (D) de (C) est l'enveloppe des normales de (C).

exemple 14 : développée de la cycloïde

Reprenons à nouveau l'exemple de la cycloïde (cf).

On sait que $\vec{T} = \sin \frac{t}{2} \vec{i} + \cos \frac{t}{2} \vec{j}$.

Le point X appartient à la normale à la cycloïde en $M(t) : (t - \sin t, 1 - \cos t)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MX} \cdot \vec{T} = 0$, soit :

$$\begin{aligned} \sin \frac{t}{2} x + \cos \frac{t}{2} y &= \sin \frac{t}{2} (t - \sin t) + \cos \frac{t}{2} (1 - \cos t) \\ &= t \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} - \left(\sin \frac{t}{2} \sin t + \cos \frac{t}{2} \cos t \right) \\ &= t \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} = t \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

d'où l'équation de la normale :

$$\sin \frac{t}{2} x + \cos \frac{t}{2} y = t \sin \frac{t}{2}.$$

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

exemple 14 : développée de la cycloïde

On trouve donc l'enveloppe des normales à la cycloïde en résolvant le système :

$$\begin{cases} (1) : (E_N) & \sin \frac{t}{2} x + \cos \frac{t}{2} y = t \sin \frac{t}{2} \\ (2) : 2.(E'_N) & \cos \frac{t}{2} x - \sin \frac{t}{2} y = 2 \sin \frac{t}{2} - t \cos \frac{t}{2} \end{cases}$$

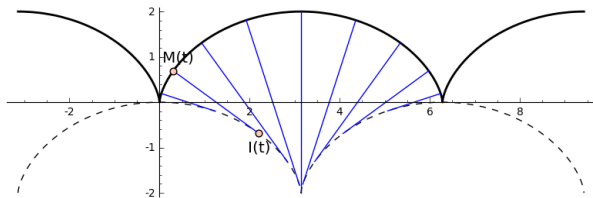
soit $(1) \cdot \sin \frac{t}{2} + (2) \cdot \cos \frac{t}{2} :$

$$x = t \sin \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + t \cos^2 \frac{t}{2} = t + \sin t$$

et $(1) \cdot \cos \frac{t}{2} - (2) \cdot \sin \frac{t}{2} :$

$$y = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} - 2 \sin^2 \frac{t}{2} - t \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = -2(1 - \cos t),$$

ce qui confirme les formules déjà obtenues.



Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

- Norme, distance, norme euclidienne.
- Boule ouverte ou fermée, sphère.
- Partie bornée, ouverte, fermée.
- Point intérieur, adhérent.
- Adhérence, intérieur, frontière d'une partie.
- Limite, continuité (ponctuelle), continuité (globale).
- Vecteur dérivé, fonction dérivée, classe $\mathcal{C}^k$.

Étude d'une courbe paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés métriques d'une courbe plane

longueur, abscisse curviligne

repère de Frenet, courbure

Centre de courbure, cercle de courbure

Enveloppe d'une famille de droites

Développée d'une courbe plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

Exemples du chapitre

- Exemple 1 : une courbe de Lissajous
- Exemple 2 : la chaînette ;
- Exemple 3 : branches infinies ;
- Exemple 4 : point singulier ;
- Exemple 5 : longueur de la chaînette ;
- Exemple 6 : longueur du cercle ;
- Exemple 7 : repère de Frenet de la cycloïde ;
- Exemple 8 : courbure de la cycloïde ;
- Exemple 9 : courbure de la chaînette ;
- Exemple 10 : courbure de la cycloïde avec α ;
- Exemple 11 : centre de courbure de la chaînette
- Exemple 12 : centre de courbure de la cycloïde avec α ;
- Exemple 13 : enveloppe de droites ;
- Exemple 14 : développée de la cycloïde.

Étude d'une courbe paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés métriques d'une courbe plane

longueur, abscisse curviligne

repère de Frenet, courbure

Centre de courbure, cercle de courbure

Enveloppe d'une famille de droites

Développée d'une courbe plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés

Méthodes et Propriétés du chapitre

Propriété 1 : tangente en un point régulier ;

Propriété 2 : expression de la courbure ;

Théorème du relèvement ; ;

(DEN) : La développée (D) de (C) est l'enveloppe des normales de (C).

Arcs paramétrés

Étude d'une
courbe
paramétrée

généralités

Méthodes

Exemples

Propriétés
métriques d'une
courbe plane

longueur, abscisse
curviligne

repère de Frenet,
courbure

Centre de
courbure, cercle de
courbure

Enveloppe d'une
famille de droites

Développée
d'une courbe
plane

Détermination pratique

Résumé

Vocabulaire

Exemples

Méthodes et propriétés