CHAPITRE 4 ISOMÉTRIES D'UN ESPACE EUCLIDIEN 2020/2021

Dans ce chapitre, E est un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire noté $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$, $(x,y) \mapsto \left(x\middle|y\right)$, ou $(x,y) \mapsto x\cdot y$.
La norme euclidienne associée est notée $x \mapsto \|x\|$.

1 — Isométries vectorielles

Définition : isométrie vectorielle

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E, on dit que u est une ***isométrie vectorielle*** lorsque :

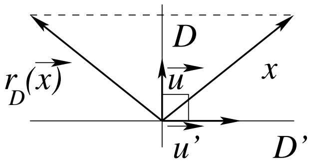
$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

Propriété 1 : bijectivité des isométries vectorielles

Toute isométrie vectorielle u est bijective ; on utilise donc également le nom d'***automorphisme orthogonal***.

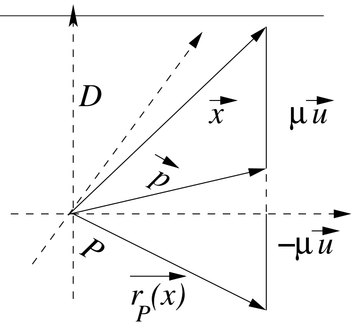
Exemple 1

Soit $E = \mathbb{R}^2$, muni du produit scalaire usuel, noté ici $(x,y) \mapsto x\cdot y$.
On considère deux droites vectorielles D et D' orthogonales de $\mathbb{R}^2$, dirigées respectivement par les vecteurs u et u', et la réflexion r_D par rapport à la droite D, c'est-à-dire la symétrie par rapport à D de direction D'. Alors $\boldsymbol{r_D}$ **est une isométrie vectorielle**.
En effet : tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique $x = \lambda u + \mu u'$, avec $u \perp u'$, et alors $r_D(x) = \lambda u - \mu u'$: donc $\|x\|^2 = \lambda^2 \|u\|^2 + \mu^2 \|u'\|^2 = \|r_D(x)\|^2$.



Exemple 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, noté ici $(x,y) \mapsto x\cdot y$.
On considère un plan vectoriel P de $\mathbb{R}^3$, et D la droite vectorielle orthogonale à P : $D = P^\perp$, et la réflexion r_P par rapport au plan P, c'est-à-dire la symétrie par rapport à P de direction D.
Alors $\boldsymbol{r_P}$ **est une isométrie vectorielle**.
En effet : tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique $x = p + \mu u$ ($p \in P \perp u$), et alors $r_P(x) = p - \mu u$.
Alors $\|x\|^2 = \|p\|^2 + \mu^2 \|u\|^2 = \|r_P(x)\|^2$.



Propriété 2 : caractérisation des isométries

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Alors u est une isométrie [vectorielle] si, et seulement si, u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$$

Propriété 3 : caractérisation des isométries (2)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$; u est une isométrie [vectorielle] si, et seulement si :
(i) Quelle que soit la base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, l'image de $\mathscr{B}$ par u est une base orthonormale.
(ii) Il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E dont l'image de $\mathscr{B}$ par u est une base orthonormale.
Malgré les apparences, ces deux propriétés (i) et (ii) sont équivalentes.

Propriété et définition (4) : groupe orthogonal

L'ensemble des isométries vectorielles de E est stable par composition et par inversion : il s'agit donc d'un groupe muni de la loi $\circ$, appelé groupe orthogonal et noté $\mathscr{O}(E)$.

Propriété 5 : stabilité de l'orthogonal

Soit $u \in \mathscr{O}(E)$, et F un sous-espace de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par E.

☞ Remarque : si u admet une valeur propre λ, et si $F \subset E_\lambda(u)$, alors F et $F^\perp$ sont stables par u.
En particulier, tout endomorphisme $u \in \mathscr{O}(3)$ admet une droite et un plan stables et orthogonaux.

2 — Matrices orthogonales

Définition : matrices orthogonales

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.

Propriété 6 : caractérisation des matrices orthogonales

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, l'une des conditions suivantes, équivalentes, est vérifiée :

(i) $(M.M^{\mathrm{T}} = I_n)$ (ii) $(M^{\mathrm{T}}.M = I_n)$

(iii) les colonnes de M forment une base orthonormée suivant le produit scalaire usuel

Exemple 3

La matrice $H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Pour le vérifier, on peut

* vérifier que $H.H^{\mathrm{T}} = I_4$;
* ou bien vérifier les propriétés suivantes, concernant les colonnes $C_1, C_2, C_3, C_4)$ de H :
  $\forall (i,j) \in [\![1,4]\!], \quad i \leqslant j, \qquad \langle C_i, C_j \rangle = C_i.C_j{}^{\mathrm{T}} = \delta_{i,j}$, c'est-à-dire $C_i.C_j{}^{\mathrm{T}} = 0$ si $i < j$ et $C_i.C_i{}^{\mathrm{T}} = 1$.

Exemple 4

La matrice $P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale, mais pas $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont seulement orthogonales et non normées.

Propriété 7 : changement de base orthonormale

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, $\mathcal{B}'$ une autre base, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors $\mathcal{B}'$ est orthonormale si, et seulement si, P est orthogonale, et alors la formule de changement de base s'écrit :

$$M' = P^{\mathrm{T}}.M.P$$

Exemple 5

On considère la rotation vectorielle r d'axe dirigé par $u = (1,1,1)$, et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

La base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right)$ est orthonormale.

Donc $r(u_3) = u_3$, $r(u_1) = \cos\frac{2\pi}{3}u_1 + \sin\frac{2\pi}{3}u_2 = \frac{-1}{2}u_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}u_2$ et $r(u_2) = -\sin\frac{2\pi}{3}u_1 + \cos\frac{2\pi}{3}u_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$.

La matrice de r dans $\mathcal{B}'$ est $R' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \boxed{}$.

Alors $R' = P^{\mathrm{T}}.R.P$, donc $R = P.R'.P^{\mathrm{T}}$. Le calcul donne $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 8 : caractérisation matricielle des isométries

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est une isométrie si, et seulement si, la matrice de u dans une base orthonormale de E est orthogonale.

Deux pièges :

⚠ Dans une base orthogonale non normée, cette propriété (caractérisation des isométries) est fausse.

⚠ Dans une base orthonormale, les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormale.

Propriété et définition (9) : groupe orthogonal d'ordre n

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la multiplication des matrices, est un groupe, appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}(n)$.

Propriété 10 : déterminant d'une matrice orthogonale

Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: alors $\det(M) \in \{-1, 1\}$.
Si $\det(M) = 1$, on dit que M est positive ou ***directe*** ou est une ***rotation***;
si $\det(M) = -1$, on dit que M est ***négative*** ou ***indirecte***.

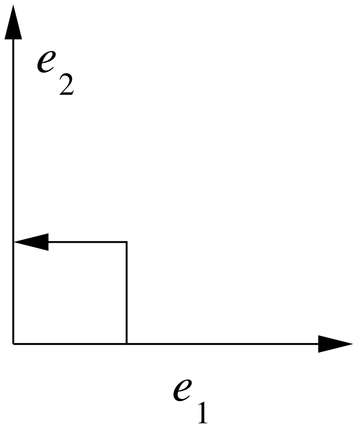
Propriété et définition (11) : groupe spécial orthogonal

L'ensemble des matrices de $\mathcal{O}(n)$ de déterminant positif (donc égal à 1) est un groupe, appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$

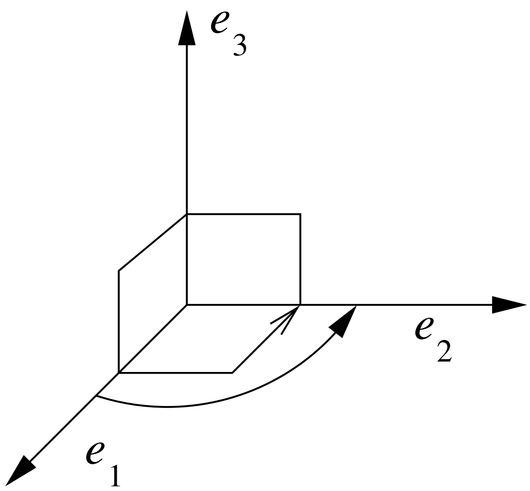
Définition : orientation d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien. Le choix d'une base orthonormée de référence $\mathscr{C}$ de E partage l'ensemble des bases orthonormées $\mathscr{B}$ en deux parties disjointes : celles dont le déterminant vaut 1 dans $\mathscr{C}$ (les bases directes), et celles dont le déterminant vaut -1 (les bases indirectes).
On dit alors qu'on a défini une ***orientation de l'espace euclidien*** E.

☞ Remarque : Le choix d'une orientation est universel pour le plan (avec une base orthonormée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et pour l'espace (avec la règle des trois doigts, ou celle du bonhomme d'Ampère, ou celle du tire-bouchon, etc).



base directe du plan



base directe de l'espace

Propriété 12 : interprétation du déterminant d'une famille de n vecteurs

Soit E un espace euclidien de dimension n, et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ n vecteurs de E.
On dit que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est ***directe*** si $\det(u_1, u_2, \dots, u_n) > 0$,
et ***indirecte*** si $\det(u_1, u_2, \dots, u_n) < 0$.
Si $n = 2$, $|\det(u_1, u_2)|$ représente l'aire du parallélogramme engendré par ces ces vecteurs ;
si $n = 3$, $|\det(u_1, u_2, u_3)|$ représente le volume du parallélépipède engendré par ces ces vecteurs.

Définition : produit mixte

Pour $n = 2$ ou $n = 3$, on utilise également les notations $[u_1, u_2] = \det(u_1, u_2)$ et $[u_1, u_2, u_3] = \det(u_1, u_2, u_3)$.
Dans le cas $n = 3$, pour tous $(u, v) \in E^2$, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que, pour tout $w \in E$,

$$[u, v, w] = x \cdot w.$$

Ce vecteur x est appelé produit vectoriel de u et v, et est noté $u \wedge v$, c'est-à-dire que

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \quad [u, v, w] = (u \wedge v) \cdot w$$

☞ Ceci justifie l'appellation de ***produit mixte*** pour le déterminant.

Propriétés (13) du produit vectoriel

Pour tous vecteurs u, v, w de E :

- $u \wedge v = -v \wedge u$;
- $x \mapsto v \wedge x$ est linéaire ;
- $(u \wedge v = 0_E) \Longleftrightarrow (u$ et v sont colinéaires.)
- $u \wedge v$ est orthogonal à u et v, $(u, v, u \wedge v)$ est directe, et $(\langle u, v \rangle)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

3 — Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Propriété 14 : matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont d'une des deux formes : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels tels que $a^2+b^2=1$ — on peut donc poser $\begin{cases} a &= \cos\theta \\ b &= \sin\theta \end{cases}$.

Propriété 15 : matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriété 16 : commutativité de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$

Pour tout couple de réels (θ,θ') : $$R_\theta.R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'}.R_\theta$$
Il en résulte que $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\circ)$ est un groupe commutatif.

Définition : angle d'une rotation

Soit « le » plan euclidien orienté, et $R \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ ***une rotation vectorielle du plan***. Alors il existe un unique réel $\theta \in [0,2\pi[$ tel que $R = R_\theta$, qui est appelé [détermination principale] de la ***mesure de l'angle*** de R.

☞ ***Remarque :*** On peut aussi choisir de prendre θ dans $]-\pi,\pi]$.

Propriété 17 : écriture complexe d'une rotation

En assimilant le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$, la rotation de matrice R_θ est représentée par l'application :
$$r_\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta}.z \end{array}$$

Propriété 18 : classification des isométries vectorielles du plan

Les isométries vectorielles du plan euclidien ont pour matrice :
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

θ	0	π	$\in]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$
R_θ	identité	symétrie centrale	rotation d'angle θ
S_θ	symétrie axiale d'axe $\Delta_{\theta/2}$		

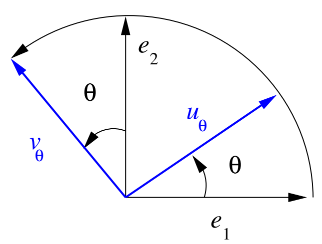
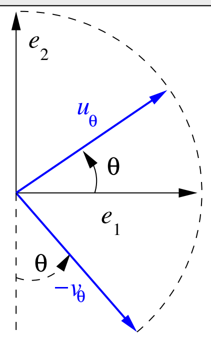
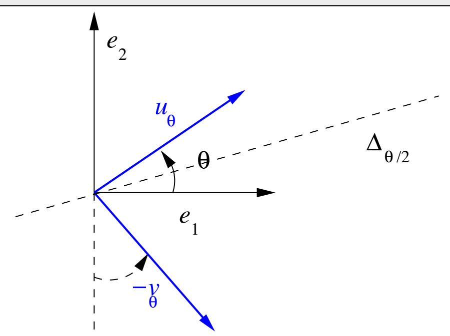


image de (e_1,e_2) par la rotation...



... par la symétrie axiale



éléments de la symétrie axiale

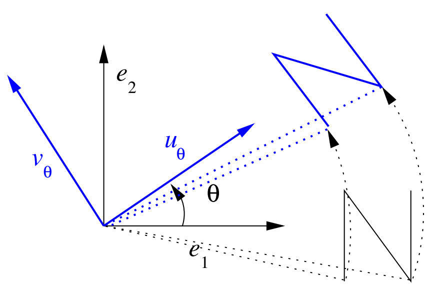
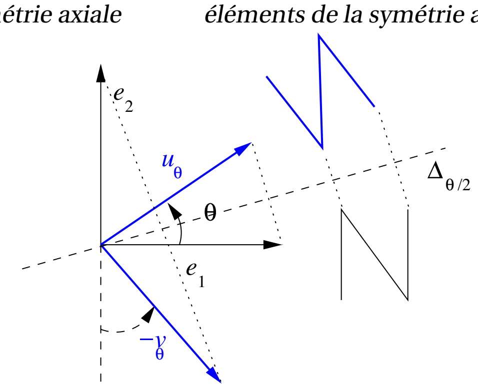


image d'une figure par la rotation...



... par la symétrie axiale

Propriété 19 : réduction d'un élément de $\mathcal{O}(3)$

On considère un élément u de $\mathcal{O}(3)$. Alors :

- u est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, u est une symétrie ;
- u admet au moins une valeur propre réelle, et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$;
- Il existe donc une droite Δ stable par u, et $\Delta \subset E_1(u)$ ou bien $\Delta \subset E_{-1}(u)$.
  De plus, $\Pi = \Delta^{\perp}$ est un plan stable par u.

Propriété 20 : nature d'un élément de $\mathcal{O}(3)$

On note ici, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,
$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

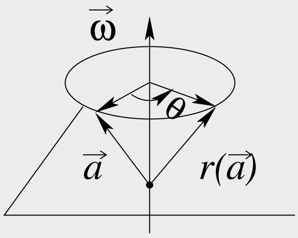
nature	matrice réduite	déterminant	trace	diagonalisable
identité	I_3	1	3	OUI
symétrie centrale	$-I_3$	-1	-3	OUI
symétrie plane (réflexion)	$\mathrm{diag}(-1,1,1)$	-1	1	OUI
symétrie axiale (demi-tour)	$\mathrm{diag}(-1,-1,1)$	1	-1	OUI
rotation	$R(\theta)$	1	$1+2\cos\theta$	NON
??? (hors programme)	$-R(\theta)$	-1	$-(1+2\cos\theta)$	NON

Définition : éléments : axe et angle d'une rotation

On considère une rotation r de l'espace, de matrice M dans la base canonique.
Alors, la droite $E_1(M)$ est l'axe de r, et l'angle de la rotation est un réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $M \sim R(\theta)$.
Pour pouvoir faire la distinction entre r et r^{-1}, on peut orienter l'axe Δ, et préciser un signe de θ compatible avec cette orientation. Pour ceci, on peut proposer la méthode suivante :

Méthode 1 : détermination de l'axe et l'angle orientés d'une rotation de matrice M

Soit M la matrice de cette rotation r, d'angle différent de $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dans la base canonique, on commence par déterminer l'axe en résolvant le système $(M - I_3).X = (0)$, et le cosinus de l'angle grâce à la relation $1 + 2\cos\theta = \mathrm{Tr}(M)$.
Soit $\vec{\omega}$ un vecteur directeur de l'axe, et $\vec{a}$ un vecteur non colinéaire à $\vec{\omega}$.
Alors le produit mixte $[\vec{a}, r(\vec{a}), \vec{\omega}]$ a le signe de $\sin\theta$.
ci-contre : $\sin\theta > 0$, et $(\vec{a}, r(\vec{a}), \vec{\omega})$ est direct (ce que l'on peut vérifier par exemple avec la règle des trois doigts), donc $[\vec{a}, r(\vec{a}), \vec{\omega}] > 0$.



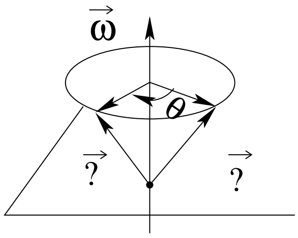


Figure analogue avec $\sin\theta < 0$:

Exemple 6

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $M \in \mathcal{SO}(3)$. Un calcul rapide amène $\omega = e_1 + e_2 + e_3 = (1,1,1)$ et $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$.

Prenons $\vec{a} = e_1 = (1,0,0)$, alors $r(\vec{a}) = e_2 = (0,1,0)$ et $[\vec{a}, r(\vec{a}), \omega] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ donc $\theta = \boxed{}$.

4 — Réduction des endomorphismes symétriques / des matrices symétriques réelles

Définition : endomorphisme symétrique

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u ***est symétrique*** lorsque
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

☞ ***Remarque :*** ne pas confondre cette définition avec celle d'un automorphisme orthogonal :
$u \in \mathscr{O}(E)$ ssi $\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E^2}, \quad \langle \boldsymbol{u(x)}, \mathbf{u(y)}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mathbf{y}\rangle$ | u symétrique ssi $\forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{E^2}, \quad \langle \boldsymbol{u(x)}, \mathbf{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mathbf{u(y)}\rangle$

Quelques exemples (7)

- ⋆ 0_E (l'endomorphisme nul) et, de manière générale, les homothéties $\lambda \mathrm{id}_E$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) sont symétriques.
- ⋆ Une ***projection orthogonale*** (*ie* dont les éléments sont orthogonaux) est un endomorphisme symétrique.

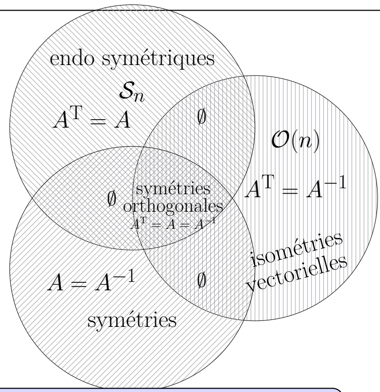
☞ ***Remarque :*** un endomorphisme symétrique n'est donc pas nécessairement injectif, ni forcément une symétrie.

- ⋆ Une ***symétrie orthogonale*** (*ie* dont les éléments sont orthogonaux) est un endomorphisme symétrique ; en revanche, une symétrie oblique n'est pas forcément symétrique.

☞ ***Remarque :*** **Une symétrie n'est donc pas forcément symétrique.**

Propriété 21 : matrice d'un endomorphisme symétrique

Soit E un espace euclidien, muni d'une **base orthonormale** $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et A la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Alors
$$(u \text{ est symétrique}) \underset{(\star)}{\iff} (A \text{ est symétrique}) \underset{\text{déf}}{\iff} \left(A^{\mathrm{T}} = A\right)$$



⚠L'équivalence ($\star$) est fausse si $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormale !
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: deux quelconques des trois propriétés suivantes impliquent la troisième, définissant ainsi une matrice ***de symétrie orthogonale*** :

(i)	A est symétrique	$A^{\mathrm{T}} = A$
(ii)	A est orthogonale	$A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$
(iii)	A est une matrice de symétrie	$A = A^{-1}$

Théorème 4.1 (dit Théorème spectral)

☞ Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E admet une base orthonormale de vecteurs propres de E, c'est-à-dire que u est diagonalisable selon une base orthonormale.

Corollaire : diagonalisation des matrices symétriques réelles

Soit A une matrice symétrique **réelle** ; alors A est diagonalisable selon une base orthonormale, c'est-à-dire : il existe une matrice $P \in \mathscr{O}(n)$ et une matrice diagonale $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n)$ telles que
$$A = P.\Delta.P^{\mathrm{T}}$$

Exemple 8

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-5) - 4 = (\lambda-1)(\lambda-6)$.
A est diagonalisable, un calcul rapide donne $E_1(A) = \mathbb{R}.(2,1)$ et $E_6(A) = \mathbb{R}(-1,2)$.
On trouve alors $A = P.D.P^{\mathrm{T}}$ avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$: $P \in \mathscr{O}(2)$.

Exemple 9

Soit $m \in \mathbb{R}$, et $B_m = \begin{pmatrix} m & 1 & -m \\ 1 & 1 & 1 \\ -m & 1 & m \end{pmatrix}$. B_m est symétrique : elle est diagonalisable selon une base orthonormale.

$$\chi_{B_m}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-m & -1 & m \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ m & -1 & \lambda-m \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 \leftarrow C_1 + C_3} \begin{vmatrix} \lambda-2m & -1 & m \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 2m-\lambda & -1 & \lambda-m \end{vmatrix} = (\lambda-2m)\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-m \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{L_3 \leftarrow L_1 + L_3} (\lambda-2m)\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2m)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda-2m)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

On trouve donc les valeurs propres $2m, -1, 2$ (peu importe qu'elles soient doubles ou non).
Un calcul banal aboutit à $E_2(B_m) = \mathbb{R}.(1,2,1)$, $E_{-1}(B_m) = \mathbb{R}.(1,-1,1)$, et $E_{2m}(B_m) = \mathbb{R}.(-1,0,1)$.

✍ Alors $B_m = Q.\Delta_m.Q^{\mathrm{T}}$ avec $\Delta_m = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{\boxed{}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$: $Q \in \mathscr{O}(3)$.

5 — Coniques

On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

5.1 – définition

Définition : coniques

Une conique est une courbe du plan d'équation cartésienne

$$a\,x^2 + 2b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0, \qquad (E)$$

où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

5.2 – Équation réduite

Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et le vecteur $V = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$; alors, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'équation de la conique devient

$$X^{\mathrm{T}}.S.X + V^{\mathrm{T}}.X + f = 0.$$

S étant une matrice symétrique, d'après le théorème spectral, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $P \in \mathscr{O}(2)$, tels que $S = P.\operatorname{diag}(\alpha,\beta).P^{\mathrm{T}}$.

Alors, en posant $X_1 = P.X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, on obtient

$X^{\mathrm{T}}.S.X = X_1{}^{\mathrm{T}}.P^{\mathrm{T}}.S.P.X_1 = X_1{}^{\mathrm{T}}.P^{\mathrm{T}}.S.P.X_1 = X_1{}^{\mathrm{T}}.\operatorname{diag}(\alpha,\beta).X_1 = \alpha\,x_1^2 + \beta y_1^2$, et par ailleurs $V^{\mathrm{T}}.X = V^{\mathrm{T}}.P^{\mathrm{T}}.X_1 = P.V^{\mathrm{T}}.X_1$.

Posons $V_1 = P.V = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$, l'équation devient alors

$$\alpha\,x_1^2 + \beta\,y_1^2 + d_1\,x_1 + e_1\,y_1 + f = 0, \qquad (E_1)$$

où $(\alpha,\beta,d_1,e_1,f) \in \mathbb{R}^5$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

☞ ***Remarques :***

* α et β sont les valeurs propres de S.
* Quitte à changer le signe de la deuxième colonne de P, on peut s'arranger pour que $\det(P) = 1$; alors le passage de (E) à (E_1) correspond à une rotation du repère d'origine $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}) \longrightarrow (O;\vec{\imath}\,',\vec{\jmath}\,')$

Si $\alpha \neq 0$, alors $\alpha\,x_1^2 + d_1\,x = \alpha\left(x_1 + \dfrac{d_1}{2\alpha}\right) - \dfrac{d_1^2}{4\alpha}$.

Dans le cas où $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, en posant $x_2 = x_1 + \dfrac{d_1}{2\alpha}$ et $y_2 = y_1 + \dfrac{e_1}{2\beta}$, l'équation (E_1) se ramène à

$$\alpha\,x_2^2 + \beta\,y_2^2 + \gamma = 0, \qquad (E_2)$$

où $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, et $\gamma = f - \dfrac{d_1^2}{4\alpha} - \dfrac{e_1^2}{4\beta}$.

☞ ***Remarques :***

* Il reste à examiner le cas $\alpha = 0$. Dans ce cas,
  si $d_1 = 0$, les termes en x sont absents (cas dégénéré).
  Si $d_1 \neq 0$, on pose $x_2 = x_1 + \dfrac{f}{d_1}$, et $d_1\,x_1 + f = d_1\,x_2$.
  On traite de manière analogue le cas $\beta = 0$, qui exclut $\alpha = 0$.
* Le passage de (E_1) à (E_2) correspond à une translation du repère $(O;\vec{\imath}\,',\vec{\jmath}\,') \longrightarrow (O';\vec{\imath}\,',\vec{\jmath}\,')$

Conclusion provisoire

Par déplacement du repère, on peut ramener l'équation d'une conique à l'une des formes suivantes (hors cas dégénérés, où l'équation ne contient pas x_1 ou x_2) :

(a) $\alpha x_2^2 + \beta y_2^2 + \gamma = 0$ avec $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$;
Quitte à diviser cette équation par $\gamma \neq 0$, et suivant le signe de α et de β, on se ramène à une des formes

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \varepsilon \qquad\qquad \left(\frac{x}{A}\right)^2 - \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \varepsilon$$

où $\varepsilon \in \{-1,0,1\}$.

(b) $d_1 x_2 + \beta y_2^2 = 0$ avec $\beta \neq 0$, ou $\alpha x_2^2 + e_1 y_2 = 0$ avec $\alpha \neq 0$.
Quitte à échanger x_2 et y_2, puis par division éventuelle par β, on se ramène à la forme $x_2^2 = \dfrac{y_2}{2p}$.

$$\alpha x_2^2 + \beta y_2^2 + \gamma = 0\,; \qquad\qquad d_1 x_2 + \beta y_2^2 = 0 \text{ ou } \alpha x_2^2 + e_1 y_2 = 0$$

Propriété 22 : équation réduite d'une conique

Par déplacement du repère, on peut ramener l'équation d'une conique à l'une des formes suivantes (hors cas dégénérés) :

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{y}{B}\right)^2=1 \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^2-\left(\frac{y}{B}\right)^2=\pm 1 \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^2-\left(\frac{y}{B}\right)^2=0 \qquad x^2=\frac{y}{2p}$$

5.3 – Classification des coniques suivant leur équation réduite

Paraboles : $x^2=\dfrac{y}{2p}$

Ce cas correspond à une matrice S dont une seule des valeurs propres est nulle.

Le paramétrage naturel est $\begin{cases} x=t \\ y=2p\,x^2 \end{cases}$.

Ellipses : $\left(\dfrac{x}{A}\right)^2+\left(\dfrac{y}{B}\right)^2=1$

Ce cas correspond à une matrice S dont les valeurs propres ont même signe. Les axes sont dirigés par les deux droites propres, qui sont orthogonales d'après le théorème spectral.

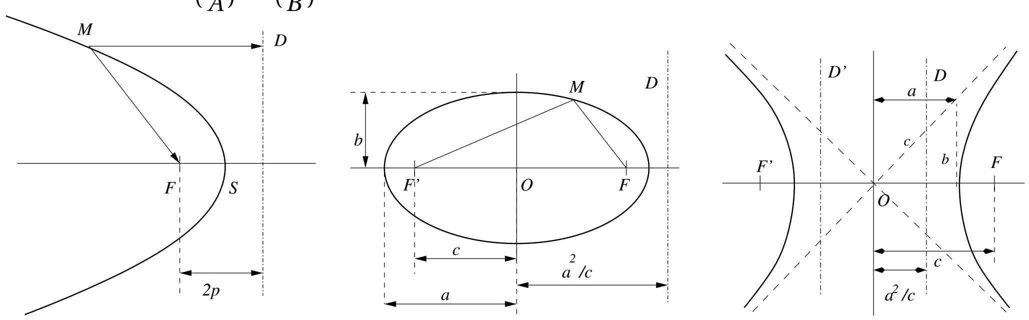
Le paramétrage naturel est $\begin{cases} x=A\cos t \\ y=B\sin t \end{cases}$.

Hyperboles : $\left(\dfrac{x}{A}\right)^2-\left(\dfrac{y}{B}\right)^2=\pm 1$

Ce cas correspond à une matrice S dont les valeurs propres ont un signe opposé.
Les axes sont dirigés par les deux droites propres, qui sont orthogonales d'après le théorème spectral. Dans le repère dirigé par les axes, les asymptotes ont pour équations $\dfrac{x}{A}=\pm\dfrac{y}{B}$.

Le paramétrage naturel est $\begin{cases} x=A\,\mathrm{ch}(t) \\ y=B\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$ pour une branche, $\begin{cases} x=-A\,\mathrm{ch}(t) \\ y=B\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$ pour l'autre branche.

L'équation réduite $\left(\dfrac{x}{A}\right)^2-\left(\dfrac{y}{B}\right)^2=0$ correspond à deux droites (on peut considérer ce cas comme dégénéré).



Parabole : $x^2=\dfrac{y}{2p}$ Ellipse : $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ Hyperbole : $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=\pm 1$

Exemple 10

Soit $m\in\mathbb{R}$, et (C_m) la conique d'équation cartésienne :

$$x^2+y^2-2mxy-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\frac{1}{4}=0 \qquad (E_m)$$

1 rotation du repère

La matrice symétrique associée S, définie par $(x \quad y)S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2+y^2-2mxy$, est $S=\begin{pmatrix}1 & -m\\ -m & 1\end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est $\chi_S(x)=\begin{vmatrix}X-1 & m\\ m & X-1\end{vmatrix}=(X-1)^2-m^2=(X-1-m)(X-1+m)$, donc les valeurs propres de S sont $\boxed{}$ et $\boxed{}$.

Un calcul de routine aboutit à $S=P.\mathrm{diag}(1-m,1+m).P^{\mathrm{T}}$, avec $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

On effectue donc un premier changement de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P.\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, ce qui donne

$(x \quad y).S.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(P.\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}.S.P.\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=(x_1 \quad y_1).P^{\mathrm{T}}.S.P.\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=(x_1 \quad y_1).\mathrm{diag}(1-m,1+m).\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ soit

$x^2+y^2-2mxy=(1-m)x_1^2+(1+m)y_1^2$, puis $x^2+y^2-2mxy-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\dfrac{1}{4}=(1-m)x_1^2+(1+m)y_1^2-2x_1+\dfrac{1}{4}$.

En conclusion, la rotation de repère d'angle $\frac{\pi}{4}$ ramène l'équation à la forme :

$$(1-m)x_1^2+(m+1)y_1^2-2x_1+\frac{1}{4}=0 \qquad (E'_m)$$

$\boxed{2}$ **translation du repère**

Deux cas particuliers doivent être étudiés tout d'abord, ceux qui correspondent à une valeurs propre nulle, c'est-à-dire $m=1$ ou $m=-1$.

Si $m=1$: l'équation devient $2y_1^2-2x_1+\frac{1}{4}=0$. Après le changement de repère (translation) $y_2=y_1, x_2=x_1+\frac{1}{8}$, on obtient l'équation (E''_1) : $y_2^2=x_2$, qui correspond à une parabole d'axe O_{x_2}.

Si $m=-1$: l'équation devient $2x_1^2-2x_1+\frac{1}{4}=0$, c'est-à-dire après détermination des racines du trinôme : $x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ou $x=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, ce qui correspond à la réunion de deux droites parallèles.

Si $m=\notin\{-1,1\}$: après le changement de repère (translation) $y_2=y_1, x_2=x_1+\frac{1}{m-1}$, l'équation (E'_m) devient

$$(1-m)x_2^2+(1+m)y_2^2+\frac{m+3}{4(m-1)}=0 \qquad (E''_m)$$

Appelons $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ le nouveau repère tel que $(\vec{I},\vec{J})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath},\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{O\Omega}=\frac{1}{\sqrt{2}(m-1)}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$.

Si $m\in]-1,1[$, cette équation est celle d'une ellipse de centre Ω, et d'axes $(\Omega,\vec{I})$ et $(\Omega,\vec{J})$.

Le demi-grand axe est $\frac{\sqrt{m+3}}{2(1-m)}$, le demi-petit axe est $\frac{\sqrt{m+3}}{2\sqrt{1-m^2}}$.

Dans le cas particulier $m=0$, on obtient un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si $|m|>1$, (C_m) est une hyperbole, dont les asymptotes ont pour équation $y_2=\pm\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}x_2$.

Ci-dessous : diverses coniques (C_m) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.