CHAPITRE 4 ISOMÉTRIES DE $\mathbb{R}^3$/CONIQUES (EXEMPLES) 2023/2024

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et d'une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1 — Matrice d'une réflexion

On considère le plan Π d'équation cartésienne $x+y+z=0$. On cherche la matrice S_1 de la réflexion par rapport à ce plan, dans la base canonique.
Un vecteur normal à Π est $\vec{n}=(1,1,1)$; soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, le projeté du vecteur $\vec{v}=(x,y,z)$ sur $\vec{n}$ est
$\vec{h}=\dfrac{\langle\vec{v}|\vec{n}\rangle}{\langle\vec{n}|\vec{n}\rangle}\vec{n}=\dfrac{x+y+z}{3}\vec{n}$;

le symétrique de $\vec{v}$ par rapport à Π est $\vec{v}-2\vec{h}=\dfrac{1}{3}x-2y-2z,-2x+y-2z,-2x-2y+z)$.

La matrice de la réflexion est donc $S_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.

On vérifie que cette matrice est orthogonale, symétrique, et de trace égale à 1.

2 — Nature et éléments d'une matrice orthogonale symétrique

On considère la matrice $S_2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Cette matrice est orthogonale et symétrique, et différente de $\pm I_3$ (c'est facile à vérifier). Il s'agit donc de la matrice d'une symétrie orthogonale, qui est soit un demi-tour, soit une réflexion. Pour de telles matrices, le déterminant est l'opposé de la trace et donc $\det(S_2)=-1$.

S_2 est une matrice de réflexion, et donc $E_1(S_2)=E_{-1}(S_2)^\perp$ et $E_1(S_2)$ est de dimension 2. $S_2-I_3=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ est effectivement de rang 1, et de noyau défini par l'équation $x-y=0$.
Finalement, S_2 est la matrice de la réflexion par rapport au plan Q d'équation $x-y=0$.

3 — Étude de la composée

On obtient $R_1=S_1.S_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&2&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$, qui est orthogonale, de déterminant 1, donc est une matrice de rotation.

Pour trouver l'axe correspondant, on forme $R_1-I_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\-1&-1&-2\\2&2&-4\end{pmatrix}$, qui est de rang 2, et de noyau dirigé par le vecteur $\vec{a}_1=(1,-1,0)$. $\operatorname{Tr}(R_1)=\dfrac{5}{3}=1+2\cos\theta$ où θ est l'angle de la rotation ; on obtient $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$.

Prenons $\vec{e}_1=(1,0,0)$; alors $r_1(\vec{e}_1)$ a pour coordonnées la première colonne de R_1, soit $\dfrac{1}{3}(2,-1,2)$.
Le déterminant $\det\big(\vec{e}_1,r_1(\vec{e}_1),\vec{a}_1\big)$ a le signe de $\sin\theta$, et il est positif.
Finalement, R_1 est la matrice de la rotation d'axe dirigé par $\vec{a}=(1,-1,0)$, et d'angle $\arccos\dfrac{1}{3}$.
Remarque : l'axe est l'intersection des plans Π et Q ; son angle est le double de l'angle entre ces deux plans, donc entre les deux vecteurs normaux.

4 — Calcul de la matrice d'une rotation

Cherchons la matrice R_2 de la rotation r_2 d'axe dirigé directement par $\vec{a}_2=(1,1,0)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
On crée une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, dont le troisième vecteur est directement colinéaire à $\vec{a}_2$. Pour cela, on norme $\vec{a}_2$, pour obtenir $w_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, puis on pose $\vec{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, orthogonal à w_2 et unitaire, et $\vec{v}_2=(0,0,-1)$.

La matrice de changement de base est $P_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&-\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$.

La matrice de la rotation dans la nouvelle base est
$R_2'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Alors $R_2=P_2.R_2'.P_2^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}&2-\sqrt{2}&-2\\2-\sqrt{2}&2+\sqrt{2}&2\\2&-2&2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

5 — Une conique

On considère la conique d'équation cartésienne :

$$(E): \qquad x^2+4xy-2y^2+\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y=-1$$

On commence par isoler la forme quadratique (homogène à un carré) : $x^2+4xy-2y^2$, et écrire la matrice symétrique associée $S=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. On vérifie en effet que $(x \quad y)S\binom{x}{y}=x^2+4xy-2y^2$.

$\chi_S=\begin{vmatrix}X-1 & -2\\ -2 & X+2\end{vmatrix}=(X-1)(X+2)-4=X^2+X-6=(X-2)(X+3)$; ainsi S admet pour valeurs propres -3 et 2.

Comme $S-2I_2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $E_2(S)=\mathrm{Vect}\binom{2}{1}$; comme $S+3I_2=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $E_{-3}(S)=\mathrm{Vect}\binom{-1}{2}$.

On effectue donc une rotation de repère définie par la matrice $P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$: en posant $X=\binom{x}{y}$ et $X_1=\binom{x_1}{y_1}$, la formule de changement de base s'écrit $X=P.X_1$, soit $X_1=P^{\mathrm{T}}.X$.

Alors $X^{\mathrm{T}}.S.X=X^{\mathrm{T}}.P.\mathrm{diag}(2,-3).P^{\mathrm{T}}.X=\left(P^{\mathrm{T}}.X\right)^{\mathrm{T}}.\mathrm{diag}(2,-3).P^{\mathrm{T}}.X={X_1}^{\mathrm{T}}.\mathrm{diag}(2,-3).X_1$ c'est-à-dire

$$x^2+4xy-2y^2=2x_1^2-3y_1^2.$$

De plus, $x=\dfrac{2x_1-y_1}{\sqrt{5}}$, $y=\dfrac{x_1+2y_1}{\sqrt{5}}$ donc $\sqrt{5}x+2\sqrt{5}y=4x_1+3y_1$; l'équation de départ devient donc $(E_1): 2x_1^2-3y_1^2+4x_1+3y_1+1=0$.

On procède ensuite à une translation pour éliminer les termes linéaires. $2x_1^2+4x_1=2(x_1+1)^2-1$, et $-3y_1^2+3y_1=-3\left(y_1-\frac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}$, ce qui amène à poser $x_2=x_1+1$ et $y_2=y_1-\frac{1}{2}$, et alors l'équation devient

$$(E_2): 2x_2^2-3y_2^2-\frac{1}{4}=0.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole d'asymptotes $y_2=\pm\dfrac{2}{3}x_2$, de centre défini par $x_2=y_2=0$.

Un paramétrage de l'hyperbole dans le dernier repère est $\begin{cases} x_2 & =\varepsilon\dfrac{\mathrm{ch}(t)}{2\sqrt{2}}\\ y_2 & =\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{2\sqrt{3}}\end{cases}$ $\varepsilon\in\{-1;1\}$.

On obtient alors, dans le premier repère, les équations des asymptotes : $y_1=-\varepsilon\sqrt{\dfrac{2}{3}}x_1-\dfrac{1}{2}-\varepsilon\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, les coordonnées du centre : $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, le paramétrage de l'hyperbole : $\begin{cases} x_2 & =\varepsilon\dfrac{\mathrm{ch}(t)}{2\sqrt{2}}-1\\ y_2=\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Et dans le repère originel, les équations des asymptotes : $\left(2\sqrt{2}\varepsilon+\sqrt{3}\right)x+\left(\sqrt{2}\varepsilon-2\sqrt{3}\right)y=-\varepsilon\sqrt{10}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$, les coordonnées du centre : $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},0\right)$, le paramétrage de l'hyperbole :

$$\begin{cases} x=\varepsilon\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\mathrm{ch}(t)-\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\ y=\varepsilon\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\mathrm{ch}(t)+\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\sqrt{2}}\end{cases}.$$