# CHAPITRE 3 ESPACES EUCLIDIENS (EXEMPLES) 2024/2025

## 1 — Dans $\mathbb{R}^4$

On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel $\langle X|Y\rangle = \sum_{k=1}^{4} x_k y_k = X^{\mathrm{T}}.Y$, les vecteurs : $u_1 = (1,0,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0,-2)$ et $u_0 = (1,1,1,1)$, et l'espace $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
On cherche à déterminer une base orthogonale de $F$, le projeté orthogonal de $u_0$ sur $F$, la matrice de la projection orthogonale sur $F$, et la distance de $u_0$ à $F$.

1. **base orthogonale de** $F$. On utilise le procédé de Gram-Schmidt, en posant
   $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_1|u_2\rangle}{\langle u_1|u_1\rangle} u_1 = u_2 - \dfrac{-3}{3} u_1 = (0,1,1,-1)$ : $(u_1, v_2)$ est une orthogonale de $F$.
2. **projeté orthogonal de** $u_0$ **sur** $F$. On utilise la formule du cours ; le projeté orthogonal de $u_0$ sur $F$ est
   $p_0 = \dfrac{\langle u_0|u_1\rangle}{\langle u_1|u_1\rangle} u_1 + \dfrac{\langle u_0|v_2\rangle}{\langle v_2|v_2\rangle} v_2 = 1u_1 + \dfrac{1}{3} v_2 = \left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$
3. **matrice de la projection orthogonale sur** $F$.
   On introduit le vecteur $u_x = (x,y,z,t)$, et on reprend le calcul précédent
   $p_x = \dfrac{\langle u_x|u_1\rangle}{\langle u_1|u_1\rangle} u_1 + \dfrac{\langle u_x|v_2\rangle}{\langle v_2|v_2\rangle} v_2 = \dfrac{x+z+t}{3} u_1 + \dfrac{y+z-t}{3} v_2 = \dfrac{1}{3}(x+z+t, y+z-t, x+y+2z, x-y+2t)$.
   On en déduit, par identification, la matrice de la projection orthogonale : $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. **distance de** $u_0$ **à** $F$. Elle est définie par $d^2 = \|u_0 - p_0\|^2 = \|u_0\|^2 - \|p_0\|^2 = 4 - \dfrac{10}{3}$. On trouve $d = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

## 2 — Dans $\mathbb{R}^3$

Mêmes questions dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel ; $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_0 = (1,1,1)$.
On trouve successivement :
$v_2 = \dfrac{1}{2}(1,-2,-1)$ ; $p_0 = 1u_1 + \dfrac{-2}{3} v_2 = \dfrac{2}{3}(1,1,2)$ ; $d^2 = \|u_0 - p_0\|^2 = \|u_0\|^2 - \|p_0\|^2 = 3 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{3}$ ;
$p_x = \dfrac{x+z}{2} u_1 + \dfrac{x-y-z}{3} v_2 = \dfrac{1}{3}(2x-y+z, -x+2y+z, x+y+2z)$, puis $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser le produit vectoriel : $u_1 \wedge u_2 = (1,1,-1)$, qui donne directement une équation cartésienne de $F$ : $x + y - z = 0$, et la distance de $u_0$ à $F$ : $d = \dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

## 3 — Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel : $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}.B)$.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et l'espace $F = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$. On cherche à déterminer une base orthogonale $(B_0 = I_3, B_1, B_2)$ de $F$, le projeté orthogonal $A_3'$ de $A^3$ sur $F$, et la distance $d$ de $A^3$ à $F$.

1. **une base orthogonale de** $F$ En utilisant le procédé de Gram-Schmidt :
   $B_0 = I_3$, $B_1 = A - \dfrac{\langle A|I_3\rangle}{\langle I_3|I_3\rangle} I_3 = A - \dfrac{2}{3} I_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et
   $B_2 = A^2 - \dfrac{\langle A^2|B_1\rangle}{\langle B1|B_1\rangle} B_1 - \dfrac{\langle A|I_3\rangle}{\langle I_3|I_3\rangle} I_3 = A^2 - \dfrac{8}{3} B_1 - \dfrac{7}{13} I_3 = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -11 & -6 & -20 \\ 26 & 2 & 12 \\ 6 & -7 & 9 \end{pmatrix}$.
2. $A_3' = \dfrac{\langle A^3|B_0\rangle}{\langle B_0|B_0\rangle} B_0 + \dfrac{\langle A^3|B_1\rangle}{\langle B_1|B_1\rangle} B_1 + \dfrac{\langle A^3|B_2\rangle}{\langle B_2|B_2\rangle} B_2 = \dfrac{5}{3} B_0 + \dfrac{40}{13} B_1 + 2B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   On constate que $A_3' = A^3$, ce qui signifie que $A^3 \in F$, donc $\mathrm{d}(A^3, F) = 0$.