CHAPITRE 3 ESPACES EUCLIDIENS ET PRÉHILBERTIENS 2024/2025

Dans ce chapitre, E est un espace de dimension finie ou infinie sur $\mathbb{R}$ (la distinction est importante et sera explicite), muni d'un produit scalaire noté $(x,y) \mapsto \langle x|y\rangle$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, ou $(x,y) \mapsto x \cdot y$. La norme euclidienne associée est notée $x \mapsto \|x\|$.

1 — Produits scalaires

Définition : Produit scalaire

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et une application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- **symétrie** : $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
- **bilinéarité** : $\forall x \in E, \varphi(x,\cdot) : y \mapsto \varphi(x,y)$ et $\forall y \in E, \varphi(\cdot,y) : x \mapsto \varphi(x,y)$ sont linéaires.
- **φ est définie positive** : $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geqslant 0$, et $\varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

Alors φ ***est un produit scalaire*** sur E.

☞ Commentaires :

- ⋆ Compte tenu de la symétrie, la propriété de bilinéarité se ramène à une des linéarités latérales, par exemple $\forall x \in E, y \overset{\varphi(x,\cdot)}{\longmapsto} \varphi(x,y)$ est linéaire.
- ⋆ La troisième propriété est souvent la plus difficile à démontrer.
- ⋆ En général, on préfère une des notations traditionnelles $\langle x|y\rangle$, $(x|y)$, ou $x \cdot y$ à $\varphi(x,y)$, « moins visuelle ».

Définition : Espace euclidien/préhilbertien

Soit φ un produit scalaire défini sur un espace E, on dit alors que (E,φ) est muni de la structure de [ou est un] ***espace euclidien*** (cas $\dim(E)$ finie), ou bien ***espace préhilbertien*** (cas $\dim(E)$ infinie).

Ici n est un entier de $\mathbb{N}^*$.

- $\boxed{E = \mathbb{R}^n}$, muni du produit scalaire défini par $\langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, est un espace euclidien.
- $\boxed{E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, muni du produit scalaire défini par $\langle A|B\rangle = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}.B)$, est un espace euclidien.
- $\boxed{E = \mathcal{C}([a,b])}$, muni du produit scalaire défini par $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$, est un espace préhilbertien.

Propriété 1 : identités liées au produit scalaire

identité d' Al-Kashi : $\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle$.

identité de polarisation : $\forall (x,y) \in E^2, \quad 4\langle x|y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$

Propriété 2 : inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(u,v) \in E^2$, alors

$$|\langle u|v\rangle| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est une égalité que si u et v sont colinéaires (« cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz »).

Exemple 1

Si f et g sont deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$, $\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t . \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$.

Propriété 3 : inégalité triangulaire

Une conséquence équivalente de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad |\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

Comme pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il n'y a égalité dans l'inégalité triangulaire que si u et v sont colinéaires.

☞ C'est cette inégalité qui garantit que $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \|u\| \end{array}$ définit une norme, appelée ***norme euclidienne***.

☞ ***Remarque :*** l'identité de polarisation permet de déterminer le produit scalaire (***forme polaire***) associé à une norme euclidienne donnée.

2 — Orthogonalité

Définition : orthogonalité de deux vecteurs de $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

Soit u et v deux vecteurs d'un espace euclidien ou préhilbertien, on dit que u et v sont ***orthogonaux*** (et on note $u \perp v$), lorsque $\langle u|v\rangle = 0$.

Propriété 4 : orthogonalité et vecteur nul

Le vecteur nul 0_E est orthogonal à tout autre vecteur ; plus précisément, le vecteur nul est le seul qui soit orthogonal à tous les autres, c'est-à-dire

$$(\forall x \in E, \langle u|x\rangle = 0) \Longrightarrow (u = 0_E)$$

Exemple 2

On considère $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}, \langle P|X^n\rangle = 0) \Longrightarrow (P = 0)$.

Définition : orthogonalité de deux sous-espaces de $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

Soit u un vecteur, et F un sous-espace de E, espace euclidien ou préhilbertien, on dit que u ***est orthogonal*** à F (et on note $u \perp F$), lorsque $\forall v \in F, \langle u|v\rangle = 0$.

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien ou préhilbertien, on dit que F et G ***sont orthogonaux*** (et on note $F \perp G$), lorsque $\forall (u, v) \in F \times G, \langle u|v\rangle = 0$.

Propriété 5 : intersection d'espaces orthogonaux

$$F \perp G \Longrightarrow F \cap G = \{0\}$$

Définition : [supplémentaire] orthogonal d'un sous-espace de $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$

Soit F un sous-espace d'un espace E euclidien ou préhilbertien, on dit que G ***est le [supplémentaire] orthogonal de*** F, et on note $F = G^\perp$, lorsque

$$F \oplus G = E \text{ et } F \perp G$$

Propriété 6 : propriétés de l'orthogonal en dimension finie

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E :

$E^\perp = \{0\}$	$\{0\}^\perp = E$	$(F^\perp)^\perp = F$
$F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$	$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$	$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

Définition : famille orthogonale

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est dite ***orthogonale*** lorsque

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow u_i \perp u_j$$

Propriété 7 : liberté des familles orthogonales

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est libre.

Exemple 3

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Si P est pair et Q impair, alors $P.Q$ est impair donc $\langle P|Q\rangle = 0$: l'espace $\mathbb{R}_P[X]$ des polynômes pairs et l'espace $\mathbb{R}_I[X]$ des polynômes impairs sont orthogonaux. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $L_n(X) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left((1 - X^2)^n\right)$.

Une suite d'intégrations par parties, dont on laissera le soin au lecteur, permet de montrer que si $m > n$, alors $\langle L_m|L_n\rangle = 0$. La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$: les ***polynômes orthogonaux*** de LEGENDRE.

Théorème 3.1 de Pythagore

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille orthogonale de $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2$$

⚠ Si $n = 2$, la réciproque est vraie : $\|u_1 + u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \Longrightarrow u_1 \perp u_2$, mais la réciproque est fausse si $n \geqslant 3$.

Propriété 8 : algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E, supposée libre.

On définit une famille $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$ en posant : $\begin{cases} e_1 = u_1 \\ e_{k+1} = u_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_{k+1} | e_i \rangle}{\langle e_i | e_i \rangle} e_i & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$

Alors la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est *orthogonale*, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$.
Pour obtenir une famille *orthonormale*, on peut ensuite *normer* chacun des vecteurs : $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|}$.

Exemple 4

On reprend l'exemple 3, avec $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (1, X, X^2, X^3)$. On obtient successivement :
$e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2 - \dfrac{\langle X^2 | 1 \rangle}{\langle 1 | 1 \rangle} 1 = X^2 - \dfrac{1}{3}$, et $e_4 = X^3 - \dfrac{\langle X^3 | X \rangle}{\langle X | X \rangle} X = X^3 - \dfrac{3}{5} X$.
On calcule ensuite $\|e_1\|^2 = \langle e_1 | e_1 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}t = 2$ et $\|e_2\|^2 = \dfrac{2}{3}$; l'écriture $X^2 = e_3 + \dfrac{1}{3} e_1$ et l'utilisation du théorème de Pythagore permet de calculer $\|e_3\|^2 = \dfrac{8}{45}$ puis $\|e_4\|^2 = \dfrac{8}{175}$.
Une base orthonormale de $\mathbb{R}_3[X]$ est donc : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X, \dfrac{3\sqrt{5}}{4} \left(X^2 - \dfrac{1}{3} \right), \dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(X^3 - \dfrac{3}{5} X \right) \right)$.

Propriété 9 : conséquence importante

Tout espace euclidien admet une base orthogonale, et donc une base orthonormale.

Propriété 10 : coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base *orthonormale* de E, et $x \in E$, alors $\boxed{x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle e_k | x \rangle e_k}$

Si la base est seulement *orthogonale*, cette formule s'écrit : $\boxed{x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\langle e_k | x \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} e_k}$

Propriété 11 : expressions matricielles du produit scalaire et de la norme

Soit $(x, y) \in E^2$,où $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est muni d'une base *orthonormale* $\mathscr{B}$, et soit X et Y les vecteurs-colonnes représentant respectivement x et y dans $\mathscr{B}$.
Alors $\boxed{\langle x | y \rangle = X^{\mathrm{T}}.Y}$ et $\boxed{\|x\|^2 = X^{\mathrm{T}}.X}$

Exemple 5

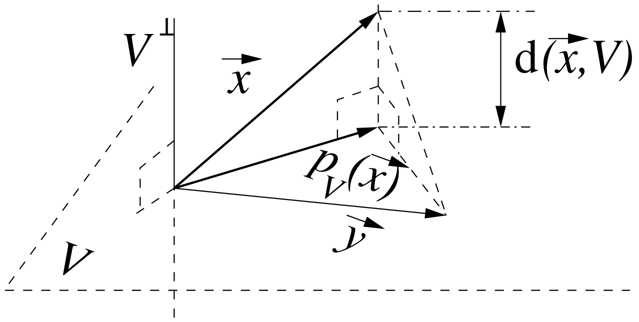
Soit u un endomorphisme associé à la matrice A dans une base orthonormale $\mathscr{B}$, on trouve ainsi des expressions matricielles de $\langle u(x) | y \rangle$ et de $\langle u(x) | u(y) \rangle$:
$\langle u(x) | y \rangle = (A.X)^{\mathrm{T}}.Y = X^{\mathrm{T}}.A^{\mathrm{T}}.Y$ et $\langle u(x) | u(y) \rangle = (A.X)^{\mathrm{T}}.A.Y = X^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.A.Y$
très utiles par la suite, comme on le verra.

Propriété 12 : projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien ou préhilbertien, et V un sous-espace de E de dimension finie, muni d'une base *orthonormale* $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.

- Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique vecteur $p_V(x) \in V$ tel que $x - p_V(x) \perp V$.
- $p_V(x)$ est appelé ***projeté orthogonal de*** x ***sur*** V, et l'application de E dans E qui à x associe $p_V(x)$ est un projecteur de E, d'image V et de noyau orthogonal à V, appelé ***projection orthogonale sur*** V.
- $\forall x \in E$, $p_V(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x | e_k \rangle e_k$. $\Big($ Si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ est seulement *orthogonale*, $p_V(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\langle x | \varepsilon_k \rangle}{\langle \varepsilon_k | \varepsilon_k \rangle} \varepsilon_k$. $\Big)$
- Pour tout $y \in V$, $\|x - y\| \geqslant \|x - p_V(x)\|$ donc $\boxed{\|x - p_V(x)\| = \inf\limits_{y \in V} \|x - y\|}$ est appelée ***distance de*** x ***à*** V, et notée $\mathrm{d}(x, V)$.

projeté $p_V(x)$ *et distance* $\mathrm{d}(x,V)$



Propriété 13 : inégalité de Bessel

$$\forall x \in E, \qquad \|p_V(x)\| \leqslant \|x\|$$

Exemple 6

On considère à nouveau $E=\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire défini dans les deux précédents exemples.
On cherche à déterminer le projeté de X^4 sur $V=\mathbb{R}_2[X]$, ainsi que la distance $\mathrm{d}(X^4,\mathbb{R}_2[X])$.
D'après l'exemple précédent, une base *orthogonale* de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(L_0,L_1,L_2)=\left(1,X,X^2-\dfrac{1}{3}\right)$.
Le projeté de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $P_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\frac{\langle X^4|L_k\rangle}{\langle L_k|L_k\rangle}L_k=\frac{1}{5}+\frac{6}{7}\left(X^2-\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{35}+\frac{6X^2}{7}$.
Alors, par orthogonalité de L_0 et L_2, et application du théorème de Pythagore :
$\|P_2\|^2=\dfrac{1}{25}\|L_0\|^2+\dfrac{36}{49}\|L_2\|^2=\dfrac{1}{25}.2+\dfrac{36}{45}.\dfrac{8}{45}=\dfrac{258}{1225}$. puis, finalement :
$\mathrm{d}(X^4,\mathbb{R}_2[X])^2=\|X^4\|^2-\|P_2\|^2=\dfrac{2}{9}-\dfrac{258}{1225}=\dfrac{128}{11025}$. et donc $\boxed{\mathrm{d}(X^4,\mathbb{R}_2[X])=\dfrac{8\sqrt{2}}{105}}$.

le minimum de la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, qui à a,b,c associe $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^4-(a+bt+ct^2)\right)^2\mathrm{d}t$ est $\dfrac{128}{11025}$,
et est atteint pour $(a,b,c)=\left(\dfrac{-3}{35},0,\dfrac{6}{7}\right)$.

Exemple 7

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel $u\cdot v$, un plan (Π) d'équation cartésienne $ax+by+cz=0$ et une droite (Δ) dirigée par le vecteur $v=(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$.
Soit $u_0=(x_0,y_0,z_0)$ un vecteur de E, déterminons la distance de u_0 à (Π) et celle de u_0 à (Δ).
Le projeté de u_0 sur Δ est $p_\Delta(u_0)=\dfrac{u_0\cdot v}{v\cdot v}v=\dfrac{ax_0+by_0+cz_0}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)$, et le carré de la distance de u_0 à (Δ) est $\mathrm{d}(u_0,\Delta)^2=$
$\|u_0\|^2-\|p_\Delta(u_0)\|^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2-\dfrac{(ax_0+by_0+cz_0)^2}{a^2+b^2+c^2}$.
Soit v_0 le projeté de u_0 sur (Π), alors v_0-u_0 est le projeté de u_0 sur la droite orthogonale à (Π), qui est dirigé par le vecteur (α,β,γ) normal à (Π).
Donc la distance de u_0 à (Π) est $\mathrm{d}(u_0,\Pi)=\|u_0-v_0\|=\dfrac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$.

Propriété 14 : représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien

On considère un espace euclidien $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$, et φ une forme linéaire sur E.
Alors, il existe un unique vecteur $n\in E\setminus\{0\}$ tel que $\qquad \forall x\in E,\quad \varphi(x)=\langle n|x\rangle$.
n est un vecteur normal à l'hyperplan $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Propriété 15 : distance d'un vecteur à un hyperplan

Soit H un hyperplan de E, n un vecteur normal à H et $x\in H$.
La distance de x à H est alors $\mathrm{d}(x,H)=\dfrac{|\langle x|n\rangle|}{\|n\|}$.