CHAPITRE 2 RÉDUCTION (EXEMPLES) 2023/2024

1 Diagonalisation de matrices

On considère la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

On veut successivement : déterminer si A_1 est diagonalisable ; [effectivement] diagonaliser A_1 ; calculer A_1^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On commence par calculer le polynôme caractéristique

$$\chi_{A_1} = \begin{vmatrix} X-2 & -3 & -5 \\ -1 & X & -1 \\ 1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} X-2 & -3 & -5 \\ 0 & X+1 & X+1 \\ 1 & 1 & X+2 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-2 & -3 & -5 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2-C_3}{=} (X+1) \begin{vmatrix} X-2 & 2 & -5 \\ -1 & X+1 & -1 \\ 0 & 0 & X+2 \end{vmatrix}$$

$\chi_{A_1} = (X+1)\left((X+1)(X-2)+2\right) = (X+1)X(X-1)$.

Comme χ_{A_1} est *scindé à racines simples* [dans $\mathbb{R}$], A_1 est diagonalisable.

Les valeurs propres de A_1 sont $-1, 0, 1$, et les sous-espaces propres sont des droites.

On recherche alors une base des sous-espaces propres :

* $A_1 + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A_1)$ si et seulement si $\begin{cases} (1) & 3x+3y+5z=0 \\ (2) & x+y+z=0 \end{cases}$ *ie* $\begin{cases} (1)-(2) & 2z=0 \\ (2) & x+y+z=0 \end{cases}$.

  On trouve que $E_{-1}(A_1) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Remarque : on aurait pu obtenir ce résultat en remarquant que $C_1 - C_2 = (0)$.

* $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A_1)$ si et seulement si $\begin{cases} (1) & 2x+3y+5z=0 \\ (2) & x+z=0 \\ (3) x+y+2z=0 & \end{cases}$ c'est-à-dire

  $\begin{cases} (1)-3(3)+(2) & 0=0 \\ (2) & x+z=0 \\ (3)-(2) y+z=0 & \end{cases}$. On trouve que $E_0(A_1) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

* $A_1 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A_1)$ si et seulement si $\begin{cases} (1) & x+3y+5z=0 \\ (2) & x-y+z=0 \\ (3) -x-y-3z=0 & \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} ((1)+(3))/2 & y+z=0 \\ (2)+((1)+(3))/2 & x+2z=0 \end{cases}$. On trouve que $E_1(A_1) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  On peut alors ***diagonaliser*** A_1, c'est-à-dire fournir un couple de matrices (P_1, Δ_1) où P_1 est inversible et Δ_1 diagonale telle que $A_1 = P_1.\Delta_1.P_1^{-1}$: $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(-1, 0, 1)$.

* La méthode standard pour calculer A_1^n consiste à écrire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1^n = P_1.\Delta_1^n.P_1^{-1} = P_1.\operatorname{diag}((-1)^n, 0, 1).P_1^{-1}$. Dans le cas présent, on peut remarquer que $A_1^3 = A_1$ et $A_1^4 = A_1^2$; par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors que $A_1^{2n} = A_1^2$ et $A_1^{2n-1} = A_1$. On peut alors vérifier que $A_1^n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} A_1^2 + \dfrac{1-(-1)^n}{2} A_1$.

2 Une matrice non diagonalisable

On considère la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On veut successivement : déterminer si A_2 est diagonalisable; trigonaliser A_2 ; calculer A_2^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On commence par calculer le polynôme caractéristique $\chi_{A_2} = \begin{vmatrix} X-2 & 5 & -4 \\ -1 & X & 0 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 5 & -4 \\ 0 & X+1 & -(X+1) \\ -1 & -1 & X+2 \end{vmatrix}$

$= (X+1) \begin{vmatrix} X-2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} (X+1) \begin{vmatrix} X-2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=} (X+1) \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & X & X \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix}$

$= (X+1)\left(X^2 - 2X + 1\right) = (X+1)(X-1)^2$. Alors $\mathrm{Sp}\,(A_2) = \{-1, 1\}$.

Comme 1 est la seule racine double, il faut étudier la dimension de $E_1(A_2)$, que l'on peut obtenir en déterminant le rang de $A_2 - I_3$:

$A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$A_2 - I_3$ n'est clairement pas nulle; ses colonnes ne sont pas proportionnelles, donc elle est de rang 2 ou 3. De plus, $A_2 - I_3$ n'est pas inversible car $1 \in \mathrm{Sp}\,(A_2)$. Donc $\mathrm{rg}\,(A_2 - I_3) = 2$, et $\dim(A_2 - I_3) = 1 < m(1)$.

A_2 n'est pas diagonalisable.

Néanmoins, elle est trigonalisable, et on peut trouver une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé f est $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette indication doit contractuellement être fournie. Elle est généralement assortie d'une indication du type :
« la première ligne de la matrice de passage P_2 est $(1,1,1)$ ».

On obtient $E_1(A_2) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1}(A_2) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

f a pour matrice T dans la base (u, v, w) si, et seulement si, $f(u) = -u$, $f(v) = v$ et $f(w) = v + w$. En appelant (U, V, W) les vecteurs-colonnes canoniquement associés à u, v, w :

$A2.U = U$, donc U est proportionnel à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, et sa première coordonnée vaut 1, donc $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$A_2.V = -V$, donc U est proportionnel à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et sa première coordonnée vaut 1, donc $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Enfin, $A_2.W = V + W$, c'est-à-dire $(A_2 - I_3).W = V$, donc les coordonnées de W vérifient $x = 1 \quad (0)$ (indication) et la système $\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 0 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0 & (3) \end{cases}$. Comme $(1) = 3(2) - 2(3)$, ce système équivaut à $\begin{cases} 3 = 1 & (0) \\ x - y = 0 & (2) \\ x + y - 2z = 0 & (3) \end{cases}$, et a pour unique solution $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Alors $P_2 = (U|V|W) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

On démontre par récurrence, ou en appliquant le binôme de Newton à $T = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la relation

$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis, à l'issue d'un calcul touristique :

$A_2^n = P_2.T^n.P_2^{-1} = \begin{pmatrix} n+1 & (-1)^n - 3n - 1 & -(-1)^n + 2n + 1 \\ n & -(-1)^n - 3n + 2 & (-1)^n + 2n - 1 \\ n & -2(-1)^n - 3n + 2 & 2(-1)^n + 2n - 1 \end{pmatrix}$.