CHAPITRE 2 RÉDUCTION 2024/2025

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension quelconque sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
À partir de la deuxième page, les espaces considérés seront de dimension finie.

1 — Éléments propres

1.1 – Vecteurs propres et valeurs propres

Définition : valeur et vecteur propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. S'il existe un vecteur *non nul* x de E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tels que

$$u(x) = \lambda x$$

on dit que x ***est un vecteur propre*** de u, associé à la ***valeur propre*** λ.

⚠ Le scalaire 0 peut être une valeur propre, mais le vecteur 0_E ne peut pas être un vecteur propre !

Propriété 1 : droite stable par un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et D une droite stable par u. Alors :

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in D, \quad u(x) = \lambda x$$

Tout vecteur propre dirige une droite propre ; toute droite propre est dirigée par un vecteur propre.

Définition : sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et λ une valeur propre de E.
Alors, l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé ***sous-espace propre de*** u ***associé à*** λ :

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$$

⚠ Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ contient tous les vecteurs propres de u associés à λ, mais il contient aussi 0_E.

Propriété 2 : valeurs propres et injectivité

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, 0 est valeur propre de u si, et seulement si, u est non injectif ;
De manière générale, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, $u - \lambda \operatorname{id}$ est non injectif.

Exemple 1

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, et l'endomorphisme D de E défini par $D(f) = f'$.
Alors $f \in E \setminus \{0_E\}$ est un vecteur propre de D si, et seulement si, il existe un réel $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f' = \lambda f$, ce qui équivaut à dire que $f : x \mapsto C.\mathrm{e}^{\lambda x}$, $C \in \mathbb{K}$.
Tout élément de $\mathbb{K}$ est une valeur propre de D, et $E_\lambda(D)$ est la droite vectorielle dirigée par $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Exemple 2

Soit A et B deux espaces supplémentaires, et p la projection sur A de direction B.
$\forall x \in E, \exists!(a, b) \in A \times B, \quad x = a + b$ et alors $p(x) = a$.
$p(x) = \lambda x$ équivaut donc à $a = \lambda a + \lambda b$, soit $(\lambda - 1)a + \lambda b = 0_E$, et donc à $(\lambda - 1)a = \lambda b = 0_E$
Les seules valeurs propres possibles de p sont 0 et 1. De plus,
$E_0(p) = \operatorname{Ker}(p) = B$ et $E_1(p) = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{id}) = \operatorname{Im}(p) = A$.

Exemple 3

Soit $E = \mathbb{R}^2$, et r la rotation vectorielle du plan, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, considérée comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Comme $r(x) \perp x$, $r(x)$ et x ne peuvent être colinéaires que si $x = 0_E$.
Donc r n'a ni valeur propre *réelle* ni vecteur propre.

Définition : spectre d'un endomorphisme en dimension finie

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, le ***spectre*** de u est l'ensemble des valeurs propres de u : il est noté $\operatorname{Sp}(u)$. C'est une partie de $\mathbb{K}$.

Propriété 3 (importante)

Les sous-espaces propres sont en somme directe, c'est-à-dire que

si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \operatorname{Sp}(u)$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$

À partir d'ici, l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Définition : Éléments propres d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et u l'endomorphisme canoniquement de $\mathbb{K}^n$ associé à A. Alors :

- ⋆ Les ***valeurs propres*** de A sont les valeurs propres de u ;
- ⋆ Les ***vecteurs propres*** de A sont les matrices-colonnes des coordonnées des vecteurs propres de u ;
- ⋆ Le ***sous-espace-propre*** $E_\lambda(A)$ est l'espace vectoriel des solutions du système linéaire $A.X = \lambda X$;
- ⋆ Le ***spectre*** de A dans $\mathbb{K}$ est celui de u.

Ces définitions posent deux problèmes :

- **le choix de la base**
  Le lien entre A et u dépend du choix de la base de E (ici, il s'agit de la base canonique). Soit P la matrice de passage d'une base de E à une autre, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ devient $A' = P^{-1}A.P$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ devient $P^{-1}.X$, donc les composantes d'un vecteur propre de A changent.
- **le choix du corps $\mathbb{K}$**
  Si, en particulier, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, puisque tout coefficient réel est aussi un complexe.
  Contrairement à la donnée d'un endomorphisme, la donnée d'une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contraint pas le choix du corps de base dans ce cas, et il se peut que $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) \neq \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$.
  Dans tous les cas, $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) \subset \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$.

Exemple 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors, $\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$.
λ est valeur propre de A si, et seulement si, A est non inversible, c'est-à-dire si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$.
Par application de la règle de SARRUS, on trouve que $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - 1$.
On en déduit que les valeurs propres de A sont les solutions de $X^3 - 1 = 0$, c'est-à-dire
$\mathbf{Sp_\mathbb{R}(A) = \{1\}}$ **et** $\mathbf{Sp_\mathbb{C}(A) = \{1, j, j^2\}}$ **où** $\boldsymbol{j = \exp\frac{2i\pi}{3}}$.

1.2 – Polynôme caractéristique

Propriété et définition (4) : polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, alors $x \mapsto \det(x I_n - A)$ est une fonction polynomiale.
Le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ ainsi défini est unitaire et de degré n ; il est appelé ***polynôme caractéristique de*** A***, et noté*** χ_A. Attention, χ est la lettre grecque *chi* et non la lettre latine X…

Propriété 5 : racines du polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{K}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0$.
Autrement dit, **les racines de χ_A sont les valeurs propres de A.**
En conséquence, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{card}\left(\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(A)\right) \leqslant n$: **A admet au maximum n valeurs propres.**

Propriété 6 : polynôme caractéristique et matrices semblables

Si B est semblable à A, alors il existe $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$, $B = P^{-1}.A.P$, donc $X I_n - B = P^{-1}.(X I_n - A).P$.
Finalement $\chi_B(X) = \chi_A(X)$.
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Définition : polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, et A la matrice canoniquement associée à u ;
le ***polynôme caractéristique de*** u est, par définition, le polynôme caractéristique de A : $\chi_A = \chi_u$.

☞ ***Remarque :*** d'après la propriété 6, le polynôme caractéristique de u est celui de la matrice de A dans n'importe quelle base.

Exemple 5

Le polynôme caractéristique de la matrice A de l'exemple 4 ci-dessus est $X^3 - 1$.

Définition : multiplicité d'une valeur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ une valeur propre de A.
Alors λ est une racine de χ_A. On définit alors ***l'ordre de multiplicité*** $m(\lambda)$ ***de*** λ ***comme valeur propre de*** A en disant qu'il est égal à l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_A, c'est-à-dire :

$$m(\lambda) = \sup\{k \in [\![1,n]\!], \quad (X-a)^k | \chi_A\}$$

Exemple 6

On considère, dans $\mathbb{R}^3$, la symétrie s par rapport au plan P d'équation $2x - y + z = 0$, de direction la droite vectorielle D dirigée par $v = (1,1,0)$.
Pour calculer le polynôme caractéristique qui est un déterminant, on choisit une base adaptée à P et D :
$\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3) = ((1,2,0),(0,1,1),(1,1,0))$. Alors $P = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $D = \mathrm{Vect}(v_3)$.

Dans $\mathcal{B}'$, la matrice de la symétrie est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\det(\lambda\,\mathrm{id} - s) = \det(\lambda I_3 - S) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$.

$\chi_s(X) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$. Les valeurs propres de s sont 1 (double) et -1 (simple).

Exemple 7

On considère, dans $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'endomorphisme Δ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Pour calculer le polynôme caractéristique, on écrit la matrice de Δ dans la base canonique de E.

Comme $\Delta(X^p) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} X^k$, la matrice M_n de Δ est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux nuls.

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \binom{i-1}{j-1} & n \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & \frac{n(n-1)}{2} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \text{\Large 0} & & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\det(\lambda\mathrm{id} - \Delta) = \det(\lambda I_n - M_n) = \lambda^n$. $\quad \chi_\Delta = X^n$.
La seule valeur propre de Δ est 0, d'ordre n.
$E_0(\Delta) = \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.

Définition : polynôme scindé

On dit que le polynôme P est ***scindé*** dans le corps $\mathbb{K}$ s'il s'écrit

$$P(X) = u \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k),$$

où $u \in \mathbb{K}^*$ (le coefficient dominant), et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ (les racines de P dans $\mathbb{K}$).
On rappelle que d'après le théorème de Gauss-d'Alembert, tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 est scindé dans $\mathbb{C}$.

Propriété 7 : déterminant, trace et polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$.
Alors $\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$, c'est-à-dire :
si $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ sont les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ répétées suivant leur ordre de multiplicité :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad \text{et} \qquad \det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

La trace de A est la somme des valeurs propres de A, et
le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Propriété 8 : encadrement de $\dim E_\lambda(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ une valeur propre de A, d'ordre $m(\lambda)$. Alors $1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant m(\lambda)$.

☞ ***Remarque :*** en particulier, pour une racine simple : $\boxed{\dim(E_\lambda(A)) = m(\lambda) = 1.}$

2 — Diagonalisation en dimension finie

2.1 – Matrices diagonalisables

Définition : endomorphisme diagonalisable

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on dit que u ***est diagonalisable*** lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Définition : matrice carrée diagonalisable

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A ***est diagonalisable*** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.
Ceci équivaut à dire que A représente un endomorphisme diagonalisable.

Propriété 9 : interprétation matricielle

On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.

Il existe alors $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $\Delta = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ tels que

$$\boxed{A = P.\Delta.P^{-1}}$$

Quelques exemples (8)

* La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (voir l'exemple 4) est diagonalisable comme matrice complexe, et non diagonalisable comme matrice réelle (car χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$).
* Soit la symétrie s par rapport au plan P d'équation $2x - y + z = 0$, de direction la droite vectorielle D dirigée par $v = (1, 1, 0)$.
  D'après l'exemple 6, s admet pour matrice dans une base bien choisie une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $-1, 1, 1$. Donc **s est diagonalisable, de valeurs propres 1 (double) et -1 (simple)**.
* Considérons l'endomorphisme Δ défini dans $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$, (voir 7).
  $\chi_\Delta(X) = X^n$; la seule valeur propre de Δ est nulle. Si Δ était diagonalisable, alors sa matrice serait semblable à la matrice nulle, donc serait nulle. **Δ n'est pas diagonalisable.**

2.2 – Conditions de diagonalisabilité

Propriété 10 : condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité N°1

Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace .

Propriété 11 : condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité N°2

Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si,
(i) son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$
(ii) pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

Propriété 12 : projecteurs et symétries

Tout projecteur, *ie* tout $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$, est diagonalisable, de spectre inclus dans $\{0, 1\}$;
Toute symétrie, *ie* tout $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$, est diagonalisable, de spectre inclus dans $\{-1, 1\}$.

Propriété 13 : condition *suffisante* de diagonalisabilité N°3

Un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
Autrement dit, si χ_u est scindé et admet n racines simples, alors u est diagonalisable.

3 — Applications de la réduction

3.1 – Puissances successives d'une matrice carrée

Propriété 14 : calcul des puissances successives d'une matrice

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors d'après la propriété 9, elle s'écrit $A = P.\Delta.P^{-1}$; donc, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$,

$$A^m = P.\Delta^m.P^{-1} = P.\mathrm{diag}\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m\right).P^{-1}$$

☞ *Cette égalité s'étend aux valeurs entières négatives ou nulles de m si A est inversible.*

Exemple 9

Soit la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Étape 1 : calcul du polynôme caractéristique sous forme factorisée.**

   $\chi_F(\lambda) = \det(\lambda I_2 - F) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = \left(\lambda - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

2. **Étape 2 : discussion de la diagonalisabilité.**

   Comme $\chi_F(\lambda)$ a deux racines distinctes : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, il est scindé à racines simples et d'après la propriété 13, F est diagonalisable.

3. **Étape 3 : détermination des sous-espaces propres.**

   Comme les racines sont simples, les sous-espaces propres sont des droites.

   $\boldsymbol{\lambda = \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$: $F - \alpha I_2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ est nécessairement de rang 1, avec deux lignes proportionnelles ;

   $E_\alpha(F) = \mathrm{Ker}\,(F - \alpha I_2)$ est défini par le système $(F - \alpha I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc par l'équation $x - \alpha y = 0$.

   $\boldsymbol{E_\alpha(F) = \mathrm{Vect}\,\binom{\alpha}{1}}$ **et de manière analogue :** $\boldsymbol{E_\beta(F) = \mathrm{Vect}\,\binom{\beta}{1}}$.

   Finalement : $\boldsymbol{F = P.\Delta.P^{-1}}$**, avec** $\boldsymbol{P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$**, et** $\boldsymbol{\Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}$.

4. **Étape 4 : calcul des puissances successives.**

   $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ car $\alpha - \beta = \sqrt{5}$.

   D'après la propriété 14, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $F^n = P.\mathrm{diag}\left(\alpha^n, \beta^n\right).P^{-1}$ donc après calcul :

   $F^n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & -\beta\alpha^{n+1} + \alpha\beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n & -\beta\alpha^n + \alpha\beta^n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix}$

   (on rappelle que $\alpha.\beta = -1$).

Exemple 10

Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. **Étape 1 : calcul du polynôme caractéristique sous forme factorisée.**

   $\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -3 & 5 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -3 & -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\overset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{=}} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1-\lambda & 1+\lambda \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ -3 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(1+\lambda)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

   $\chi_B(\lambda) \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3}{=} (\lambda-1)(1+\lambda)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$.

   Commentaire : cette étape est souvent la plus pénible ; il vaut mieux procéder par des opérations de pivot de Gauss, qui permettent de factoriser le polynôme en cours de calcul, et vérifier les valeurs propres trouvées $(1, -1, 2)$ en écrivant que $\mathrm{Tr}\,(B) = 4 + 2 - 4 = 2$ est bien égale à la somme des valeurs propres : $1 - 1 + 2 = 2$.

2. **Étape 2 : discussion de la diagonalisabilité.**

   Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, avec des valeurs propres distinctes, donc d'après la propriété 13 (CS3), B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. **Étape 3 : détermination des sous-espaces propres.**
   * $\boldsymbol{\lambda = 1}$; $E_1(B)$ est de dimension 1, et il est défini par le système $B.X = X$, soit $(B - I_3)X = (0)$, c'est-à-dire : $\begin{cases} 3x+3y-5z &= 0 \\ x+y-z &= 0 \\ 3x+3y-5z &= 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x+y &= 0 \\ \quad\ z &= 0 \end{cases}$. $\quad \boldsymbol{E_1(B) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.
   * $\boldsymbol{\lambda = -1}$; $E_{-1}(B)$ est de dimension 1, et il est défini par le système $B.X = -X$, soit $(B + I_3)X = (0)$, c'est-à-dire : $\begin{cases} 5x+3y-5z &= 0 \\ x+3y-z &= 0 \\ 3x+3y-3z &= 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x-z &= 0 \\ \quad\ y &= 0 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{E_{-1}(B) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.
   * $\boldsymbol{\lambda = 2}$; $E_2(B)$ est de dimension 1, et il est défini par le système $B.X = 2X$, soit $(B - 2I_3)X = (0)$, c'est-à-dire : $\begin{cases} 2x+3y-5z &= 0 \\ x \quad\ -z &= 0 \\ 3x+3y-6z &= 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} -3x+3y &= 0 \\ x-z &= 0 \\ 3x-3y &= 0 \end{cases}$, $\quad \boldsymbol{E_2(B) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

   Finalement : $B = P.\Delta.P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. **Étape 4 : calcul des puissances successives.**
   D'après la propriété 14, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
   $$B^n = P.\operatorname{diag}\left((-1)^n, 1, 2^n\right).P^{-1} = \begin{pmatrix} 1-(-1)^n+2^n & -(-1)^n+2^n & -1+2(-1)^n-2^n \\ -1+2^n & 2^n & 1-2^n \\ -(-1)^n+2^n & -(-1)^n+2^n & 2(-1)^n-2^n \end{pmatrix}$$

Exemple 11

Considérons la matrice $C' = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. **Étape 1 : calcul du polynôme caractéristique sous forme factorisée.**
   Posons $C = 3C'$; le calcul direct du polynôme caractéristique de C' donnerait
   $\chi_{C'}(\lambda) = \det(C' - \lambda I_3) = \det\left(\dfrac{1}{3}C - \lambda I_3\right) = \det\left(\dfrac{1}{3}(C - 3\lambda I_3)\right) = \dfrac{1}{3^3}\det(C - 3\lambda I_3) = \dfrac{1}{27}\chi_C(3\lambda)$.
   On est donc amené à écrire $\chi_{C'}(\lambda) = \dfrac{1}{27}\begin{vmatrix} 1+3\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 3\lambda-3 & -2 \\ 2 & 2 & 3\lambda+1 \end{vmatrix}$, ce qui est peu pratique.
   Il est bien plus simple de réduire la matrice $C = 3C'$, dont les vecteurs propres sont ceux de C', et les valeurs propres sont le triple de celles de C'.
   $$\chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ = \\ C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda-3 & 1-\lambda \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
   $$\chi_C(\lambda) \overset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$
   $\operatorname{Tr}(B) = -1+3-1 = 1$, qui est bien égal à la somme des valeurs propres : $1+1-1 = 1$.
2. **Étape 2 : discussion de la diagonalisabilité.**
   Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, avec une valeur propre double : 1.
   D'après la propriété caractéristique 11, il faut donc vérifier que $\dim E_1 = m(1) = 2$.
3. **Étape 3 : détermination des sous-espaces propres.**
   * $\boldsymbol{\lambda = 1}$; $E_1(C)$ est défini par le système $C.X = X$, soit $(C - I_3)X = (0)$, c'est-à-dire : $\begin{cases} -2x-2y-2z &= 0 \\ 2x+2y+2z &= 0 \\ -2x-2y-2z &= 0 \end{cases}$;
     ie $x+y+z = 0$: $\boldsymbol{E_1(C)}$ **est un plan, ce qui justifie la diagonalisabilité de** $\boldsymbol{C}$.
     De plus $E_1(C) = E_{\frac{1}{3}}(C') = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   * $\boldsymbol{\lambda = -1}$; $E_{-1}(C)$ est défini par le système $C.X = -X$, soit $(C + I_3)X = (0)$, *ie* : $\begin{cases} \quad -2y-2z &= 0 \\ 2x+4y+2z &= 0 \\ -2x-2y &= 0 \end{cases}$.

$$\boldsymbol{E_{-1}(C) = E_{-\frac{1}{3}}(C') = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

Finalement : $\boldsymbol{C = P.\Delta.P^{-1}}$**, avec** $\boldsymbol{P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}}$**, et** $\boldsymbol{C' = P.\frac{1}{3}\Delta.P^{-1}}$**.**

4. **Étape 4 : calcul des puissances successives.**
   D'après la propriété 14, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
   $(C')^n = P.\operatorname{diag}\dfrac{1}{3^n}\left(1,1,(-1)^n\right).P^{-1} = \dfrac{1}{3^n}\begin{pmatrix}(-1)^n & -1+(-1)^n & -1+(-1)^n\\1-(-1)^n & 2-(-1)^n & 1-(-1)^n\\-1+(-1)^n & -1+(-1)^n & (-1)^n\end{pmatrix}$.
   On peut aussi écrire que $(C')^n = \begin{cases}3^{-n}C \text{ si } n \text{ est impair}\\3^{-n}I_3 \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$

Exemple 12

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\-1 & 0 & -1\\4 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

1. **Étape 1 : calcul du polynôme caractéristique sous forme factorisée.**
   $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\1 & \lambda & 1\\-4 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix}1+\lambda & -1-\lambda & 0\\1 & \lambda & 1\\-4 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\1 & \lambda & 1\\-4 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$
   $\chi_M(\lambda) \overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} (\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\0 & \lambda & 1\\-1-\lambda & 0 & \lambda-3\end{vmatrix} = (1+\lambda)(\lambda(\lambda-3)+1+\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1)$
   $\chi_M(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$: $\operatorname{Tr}(M) = -2+4-1 = 1$, qui est bien égal à la somme des valeurs propres : $1+1-1 = 1$.
2. **Étape 2 : discussion de la diagonalisabilité.**
   Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, avec une valeur propre double : 1.
   D'après la propriété caractéristique 11, il faut donc vérifier que $\dim E_1 = m(1) = 2$.
3. **Étape 3 : détermination des sous-espaces propres.**
   * $\boldsymbol{\lambda = 1}$; $E_1(M)$ est défini par le système $M.X = X$, soit $(M - I_3)X = (0)$, c'est-à-dire :
     $\begin{cases}-3x+y-z &= 0\\-x-y-z &= 0\\4x \quad +2z &= 0\end{cases}$ soit $\begin{cases}x+y+z &= 0\\2x \quad +z &= 0\end{cases}$. $\boldsymbol{E_1(M)}$ **est une droite, donc** $\boldsymbol{M}$ **est** ***non diagonalisable.***
     De plus $\boldsymbol{E_1(M) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}$.
   * $\boldsymbol{\lambda = -1}$; $E_{-1}(M)$ est défini par le système $M.X = -X$, soit $(M + I_3)X = (0)$, c'est-à-dire :
     $\begin{cases}-x+y-z &= 0\\-x+y-z &= 0\\4x \quad +4z &= 0\end{cases}$ soit $\begin{cases}x+y+z &= 0\\x \quad +z &= 0\end{cases}$. $\boldsymbol{E_{-1}(M) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}$.

3.2 – Récurrences linéaires

Propriété 15 : écriture matricielle d'une relation de récurrence linéaire

Soit p suites à termes complexes, notées $(u_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant p}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la matrice-colonne dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est $u_{i,n}$: $U_n = \begin{pmatrix}u_{1,n}\\u_{2,n}\\\vdots\\u_{p,n}\end{pmatrix}$.

les suites $(u_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant p}$ sont définies par la donnée des $(u_{k,0})_{1\leqslant k\leqslant p}$ (équivalente à celle de U_0) et de p relations de récurrences linéaires équivalentes à $U_{n+1} = A.U_n$.
De manière analogue à une suite géométrique : $(\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = A.U_n) \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n.U_0)$.

Exemple 13

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée de u_0 et v_0, et la relation de récurrence

$(R_n) : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n \end{cases}$ On constate qu'en posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, ces relations se ramènent à $U_{n+1} = F.U\,n$, où F est la matrice étudiée dans l'exemple 9.

Alors $U_n = F^n.U_0 : \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{1+n} - \beta^{1+n}\right) u_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\beta^n - \alpha^n\right) v_0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right) u_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) v_0 \end{pmatrix}$

Application classique :

On considère la suite v_n définie par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En posant $v_n = u_{n-1}$, on constate que cette relation équivaut à (R_n), résolue plus haut (en posant $(u_0, v_0) = (1, 0)$, on trouve $u_1 = u_0 = 1$). On en déduit donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{1+n} - \beta^{1+n}\right)$, où $\{\alpha, \beta\} = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
Commentaire : ceci définit la célèbre suite de Léonard de Pise, dit Fibonacci.
Contrairement aux apparences, la suite (u_n) est à valeurs entières pour $n \in \mathbb{N}$.

☞ **De manière générale**, une relation de récurrence linéaire double :

(R_2) $$u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, se ramène en posant $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ à la relation de récurrence

(M_2) $$U_{n+1} = G.U_n \text{ où } G = \begin{pmatrix} -a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On est donc amené à réduire la matrice G, de polynôme caractéristique $\chi_G(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a & -b \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + b$, donc à résoudre l'***équation caractéristique de*** (R_2) : $\chi_2 : X^2 + aX + b = 0$.
Si cette équation admet deux racines distinctes α et β, alors G est diagonalisable, de valeurs propres α et β, et on aboutit finalement à $u_n \in \text{Vect}\left((\alpha^n), (\beta^n)\right)$.

Exemple 14

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et les relations de récurrence :

$\begin{cases} 3u_{n+1} &= -u_n - 2v_n - 2w_n \\ 3v_{n+1} &= 2u_n + 3v_n + 2w_n \\ 3w_n &= -2_n - 2v_n - w_n \end{cases}$. On constate qu'en posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, ces relations se ramènent à $U_{n+1} = C'.U_n$, où C' est la matrice diagonalisée dans l'exemple 11.
Alors $U_n = (C')^n U_0$. On calcule sans difficulté U_n, et on constate que $(3^n u_n)$, $(3^n v_n)$ et $(3^n w_n)$ sont 2-périodiques.
Alors $u_n = \mathcal{O}(3^{-n})$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4 — Trigonalisation en dimension finie

Définition : endomorphismes trigonalisables

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on dit que u est ***trigonalisable*** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Définition : matrice trigonalisable

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que M est ***trigonalisable*** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure ; ce qui signifie qu'elle représente un endomorphisme trigonalisable.

Propriété (admise) (16) : endomorphisme trigonalisable

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Par conséquent, tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$; toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Exemple 15

On considère la relation de récurrence

(R_2) $$u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$$

étudiée plus haut lorsque X^2+aX+b admet deux racines distinctes.
On se place maintenant dans le cas où X^2+aX+b admet une racine double, c'est-à-dire lorsque $a^2-4b=0$ (et alors la racine double de X^2+aX+b est $\alpha=-\frac{a}{2}$, et $X^2+aX+b=(X-\alpha)^2$).
En posant $U_n=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$, (R_2) : $u_{n+2}-2\alpha u_{n+1}+\alpha^2 u_n=0$ se ramène à $U_{n+1}=A.U_n$ avec $A=\begin{pmatrix}2\alpha & -\alpha^2\\1 & 0\end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $(\lambda-\alpha)^2$, donc A n'est pas diagonalisable (sinon elle serait semblable à αI_2, donc égale à αI_2).
On est donc amené à la trigonaliser. On abandonnera le cas « sans intérêt » $\alpha=0$.
Puisque $A-\alpha I_2=\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha^2\\1 & -\alpha\end{pmatrix}$ (matrice de rang 1), $E_\alpha(A)=\text{Vect}\left(\begin{smallmatrix}\alpha\\1\end{smallmatrix}\right)$.

On admet que A est semblable à la matrice $T=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\0 & \alpha\end{pmatrix}$; on est donc amené à chercher une base (u_1,u_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(u_1)=\alpha\, u_1$ et $f(u_2)=u_1+\alpha u_2$.
$u_1=(\alpha,1)$ convient ; la condition sur u_2 est équivalente au système $(A-\alpha I_2).X=U_1$, donc à l'équation $x-\alpha y=1$.
$u_2=(1,0)$ convient.

Finalement, $\boldsymbol{A=P.T.P^{-1}}$ avec $\boldsymbol{P=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}$ et $\boldsymbol{T=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\0 & \alpha\end{pmatrix}}$.

On peut montrer (par exemple par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$) que $T^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\0 & \alpha^n\end{pmatrix}$; ceci permet de calculer A^n, puis U_n et u_n en fonction de n et u_0,u_1.
On vérifiera que $(\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}-2\alpha u_{n+1}+\alpha^2u_n=0)\iff(\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\lambda\,\alpha^n+\mu\,n\,\alpha^n)$

Exemple 16

On reprend l'exemple 12, avec la matrice $M=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\-1 & 0 & -1\\4 & 0 & 3\end{pmatrix}$: on rappelle que M est *non diagonalisable*, de valeurs propres 1 (double) et -1 (simple), et que $E_1(M)=\mathbb{R}.\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)$; $E_{-1}(M)=\mathbb{R}.\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$.
Il reste à compléter le système libre ainsi défini : $(u_1,u_2)=\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)\right)$ par un troisième vecteur.

première méthode : sans indication

On complète (u_1,u_2) par le vecteur le plus simple qui convienne : $u_3=(1,0,0)$.
Alors $M.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=C_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}$ d'une part, et la matrice M dans la base (u_1,u_2,u_3) est nécessairement $\begin{pmatrix}-1 & 0 & a\\0 & 1 & b\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, ce qui signifie que $M.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; il suffit donc de rechercher les réels a et b tels que

$M.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\begin{cases}a+b & =-3\\b & =-1\\-a-2b & =4\end{cases}$.

On trouve $a=-2$, $b=-1$, donc **$\boldsymbol{M=P.T.P^{-1}}$ avec $\boldsymbol{T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$ et $\boldsymbol{P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\-1 & -2 & 0\end{pmatrix}}$.**

deuxième méthode : avec indication (cas majoritaire)

Un énoncé type précise que $M\sim T_1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, *avec une matrice de passage dont la première ligne est* $(1,1,1)$.
En notant f l'endomorphisme canoniquement associé à M, il s'agit de trouver une base (v_1,v_2,v_3) telle que

$f(v_1)=-1.v_1+0.v_2+0.v_3=-v_1$ (première colonne de T_1) ;
$f(v_2)=\quad 0.v_1+1.v_2+0.v_3=v_2$ (deuxième colonne de T_1) ;
$f(v_3)=\quad 0.v_1+1.v_2+1.v_3=v_2+v_3$ (troisième colonne de T_1).

$f(v_1)$	$\mathbf{f(v_2)}$	$f(v_3)$	
-1	**0**	0	v_1
0	**1**	1	v_2
0	**0**	1	v_3

$v_1 = u_1 \in E_{-1}(M)$ et $v_2 = u_2 \in E_1(M)$ conviennent ; en notant (x, y, z) les coordonnées de v_3, il reste à résoudre le système équivalent à $f(v_3) - v_3 = v_2$, c'est-à-dire $\begin{cases} -3x + y - z & = 1 \quad (1) \\ -x - y - z & = 1 \quad (2) \\ 4x + 2z & = -2 \quad (3) \end{cases}$.

On constate que $(1) = -(2) - (3)$; par ailleurs, la contrainte sur la première ligne de la matrice revient à écrire $x = 1$. On trouve $z = -3$ et $y = 1$.

Finalement $\boldsymbol{M = P_1.T_1.P_1^{-1}}$ **avec** $\boldsymbol{T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ **et** $\boldsymbol{P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$**.**

Application : calcul de M^n

Mettre la matrice T_1 à la puissance n revient à résoudre les relations de récurrence linéaire :

$\begin{cases} u_{n+1} = & -u_n \\ v_{n+1} = & v_n + w_n \\ w_{n+1} = & w_n \end{cases}$, donc $\begin{cases} u_n \text{ est géométrique de raison } -1 \\ v_n \text{ est arithmétique de raison } w_0 \\ w_n \text{ est constante} \end{cases}$: $\begin{cases} u_n = & (-1)^n u_0 \\ v_n = & v_0 + n w_0 \\ w_n = & w_0 \end{cases}$.

Alors $T_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M^n = P_1.T_1^n.P_1^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n - n & 1 - (-1)^n - n & -n \\ -n & 1 - n & -n \\ 1 - (-1)^n + 2n & -1 + (-1)^n + 2n & 1 + 2n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.