

CHAPITRE 1bis**MATRICES ET DÉTERMINANTS****2024/2025**

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 — Rappels sur les matrices

- ① En première année, vous avez vu la définition d'une matrice comme tableau de chiffres et son interprétation comme représentante d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ (pour une matrice à n lignes et p colonnes).

1.1 – Matrices de taille quelconque**Propriété 1 : espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**

L'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n.p$, noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Sa base canonique est $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ où tous les coefficients de la matrice $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Si $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $E_{l,k} = (\delta_{l,i} \delta_{k,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Propriété 2 : règles de calcul dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit A, B, C trois matrices de taille adaptée, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, sous réserve d'existence des produits :

$$\begin{aligned} A.(B.C) &= (A.B).C & A.(\lambda B + C) &= \lambda A.B + A.C & (\lambda A + B).C &= \lambda A.C + B.C \\ \lambda (A.B) &= A.(\lambda B) = A.(\lambda B) & (A.B)^T &= B^T.A^T & (\lambda A + B)^T &= \lambda A^T + B^T \\ \overline{A.B} &= \overline{A}.\overline{B} \text{ et } \overline{(\lambda A + B)} &= \overline{\lambda} \overline{A} + \overline{B} & A.I_p &= I_n.A = A & (0).A = (0) = A.(0) \end{aligned}$$

- ⚠ en général : $A.B \neq B.A$ (même lorsque que les deux termes existent simultanément), et en général $A.B = (0) \not\Rightarrow A = (0)$ ou $B = (0)$.

Définition : rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de A** :

- * le rang de l'application linéaire [canoniquement] associée à A ;
- * le nombre de colonnes non nulles après pivot de Gauss sur les colonnes de A ;
- * le nombre de lignes non nulles après pivot de Gauss sur les lignes de A .

Ces trois entiers sont bien sûr égaux.

Propriété 3 : systèmes linéaires et matrices

Tout système à n équations et p inconnues peut se mettre sous la forme $A.X = B$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la matrice-colonne des inconnues, et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice-colonne du second membre. Alors le système admet des solutions si et seulement si $B \in \text{Im}(A)$, et, dans ce cas, l'ensemble des solutions est de la forme $X_0 + S$, où $S = \text{Ker}(A)$ est de dimension $p - \text{rg}(A)$.

1.2 – matrices carrées**Propriété 4 : espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

L'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, carrées d'ordre n , est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n^2 , noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et stable par multiplication.

Définition et propriété : matrice inversible

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est inversible si, et seulement si, une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- ★ A représente canoniquement un isomorphisme;
- ★ $A \underset{L}{\sim} I_n$ (la matrice identité d'ordre n)
- ★ le rang de A est égal au nombre de colonnes de A ;
- ★ il existe une matrice C telle que $C.A = I_n$;
- ★ il existe une matrice C telle que $A.C = I_n$;
- ★ pour tout B , le système $A.X = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1}.B$.
- ★ pour tout B , le système $A.X = B$ admet au moins une solution.

Définition : ensemble des matrices carrées inversibles

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ et **appelé groupe linéaire** de $\mathbb{K}$.

Définition : puissances d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $m \in \mathbb{N}$; on définit les **puissances successives** de A par récurrence :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad A^{m+1} = A.A^m = A^m.A$$

De plus, si A est inversible, $A^{-m} = (A^{-1})^m$, ce qui permet de définir A^m pour $m \in \mathbb{Z}$.

Alors $A^{p+q} = A^p.A^q$ et $(A^p)^q = A^{pq}$ pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ ($(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ si A est inversible).

Propriété 5 : binôme de NEWTON

Soit A et B deux matrices qui commutent, c'est-à-dire que $A.B = B.A$, et $m \in \mathbb{N}$, alors

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

Propriété 6 : inversion et règle de calcul

Soient A et B deux matrices inversibles, alors

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Propriété 7 : changement de base

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , et P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base $\mathcal{B}$.

Alors, P est inversible et appelée **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

De plus, si M et M' sont les matrices de u respectivement dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors

$$M' = P^{-1}.M.P$$

2 — matrices par blocs et sous-espaces stables

Définition : matrices définies par blocs

Soit $(A_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ $n \times p$ matrices vérifiant les conditions suivantes :

★ Pour $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, les matrices $(A_{i_0,j})_{1 \leq j \leq p}$ ont le même nombre de lignes : $l(i_0)$;

★ Pour $j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ fixé, $(A_{i,j_0})_{1 \leq i \leq n}$ ont le même nombre de colonnes : $k(j_0)$.

On peut alors écrire une matrice « par blocs » :

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$$

On écrira $M = (A_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{N \times P}(\mathbb{K})$, avec $N = \sum_{i=1}^n l(i)$ et $P = \sum_{j=1}^p k(j)$.

Propriété 8 : opérations par blocs

Les règles de calcul pour les matrices définies par blocs sont formellement les mêmes que les règles de calcul pour les scalaires, c'est-à-dire :

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $M = (A_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $N = (B_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$: $M + \lambda N = (A_{i,j} + \lambda B_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$;

Si $M = (A_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $N = (B_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$: $M.N = (C_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q}$ avec $C_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k}.B_{k,j}$.

Exemple 1

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et la matrice $M = \begin{pmatrix} (0) & -A \\ A & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Alors $A^2 = -I_2$ (I_2 représente la matrice identité), et $M^2 = \begin{pmatrix} -A^2 & (0) \\ (0) & -A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & (0) \\ (0) & I_2 \end{pmatrix} = I_4$.

Définition : sous-espace stable par un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, u un endomorphisme de E ($u \in \mathcal{L}(E)$), et F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F **est stable par** u lorsque $u(F) \subset F$.

☞ **Remarque :** on n'a pas forcément $u(F) = F$: par exemple, $u(\text{Ker } u) = \{0_E\}$.

Lorsque $u(F) = F$, on peut dire que F **est globalement invariant** par u .

Quelques exemples (2)

- ★ Tout sous-espace de E est stable par toute homothétie λid_E , où $\lambda \in \mathbb{K}$.
Réciproquement, on montre qu'un endomorphisme de E qui laisse stables tous les sous-espaces de E est forcément une homothétie.
- ★ $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par u , mais aussi par $u^2 = u \circ u$, $u^3 = u \circ u \circ u$, etc.
- ★ Soit $E = \mathbb{R}[X]$, et l'endomorphisme D défini sur E par $D(P) = P'$; D laisse stable tous les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$.
Le sous-espace $\mathbb{R}^P[X]$ des polynômes pairs de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas stable par D , mais il est stable par $D^2 = D \circ D$.

Définition : endomorphisme induit

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u .

On peut alors définir un endomorphisme $\hat{u} \in \mathcal{L}(F)$ par $\forall x \in F, \hat{u}(x) = u(x) \in F$.

L'endomorphisme $\hat{u}$ est appelé **endomorphisme induit** par u sur F . Une autre notation de $\hat{u}$ est $u|_F$.

☞ **Remarque :** u et $\hat{u}$ sont distincts, bien qu'ils correspondent au même calcul; ils n'ont pas le même ensemble de départ, et $\hat{u}$ peut être injectif sans que u ne le soit.

Exemple 3

Soit le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace de E formé des fonctions polynomiales.

Alors $u(f) = x \mapsto f'(x) - 2xf(x)$ définit un endomorphisme de E .

On vérifie aisément que F est stable par u , définissant ainsi un endomorphisme $\hat{u} : \hat{u}(P) = P' - 2XP$.

Or, nous savons que $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = 2xy(x) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda \exp(x^2)$; de plus, d'après le théorème des croissances comparées, $h : x \mapsto \exp(x^2)$ n'est pas polynomiale.

Il en résulte que $\text{Ker}(u) = \mathbb{R} \cdot h$ et que $\text{Ker}(\hat{u}) = \{0_E\}$; $\hat{u}$ est donc injective, alors que u ne l'est pas.

De même, on peut montrer que u est surjective, alors que $\hat{u}$ ne l'est pas.

Propriété 9 : stabilité et endomorphismes qui commutent

Soient u et v deux endomorphismes qui commutent, c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$; alors, le noyau et l'image de u sont stables par v .

Propriété 10 : stabilité et matrices diagonales par blocs

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ une décomposition en somme directe de E .

On considère une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à cette décomposition.

Alors, chacun des sous-espaces E_i est stable par u si, et seulement si, la matrice de M de u dans $\mathcal{B}$ est **diagonale par blocs** :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & (0) & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & A_2 & (0) & & (0) \\ (0) & (0) & A_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & (0) & \cdots & (0) & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{M}_{\dim E_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u|_{E_i}$.

Définition : matrice triangulaire [par blocs]

Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On dit que M est **triangulaire supérieure** si $j > i \implies a_{i,j} = 0$, et **triangulaire inférieure** si $i > j \implies a_{i,j} = 0$.

On définit de manière analogue une **matrice triangulaire par blocs** (en remplaçant les $a_{i,j}$ par $A_{i,j}$!).

Propriété 11 : interprétation d'une matrice triangulaire

Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée associée à un endomorphisme u dans la base

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Alors M est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'espace $V_k = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$ est stable par u .

Propriété 12 : interprétation d'une matrice triangulaire par blocs

Soit $M = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, associée à u dans une base $\mathcal{B}$. On suppose que les blocs diagonaux sont carrés : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, A_{k,k} \in \mathcal{M}_{l(k)}(\mathbb{K})$.
 Soit V_k le sous-espace de E correspondant au bloc $A_{k,k}$ dans $\mathcal{B}$.
 Alors M est triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire $j > i \implies A_{i,j} = (0)$ si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'espace $F_k = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ est stable par u .

3 — Déterminants

Définition et propriété : déterminant d'une matrice

Il existe une unique application $\det$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
- (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
- (iii) le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.

Cette application est **appelée déterminant**.

Interprétation en termes d'opérations de pivot de Gauss

On rappelle qu'il existe trois types d'opérations de pivot de Gauss sur les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_n$ d'une matrice A :

- (T) les **transvections** : $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ si $\lambda \in \mathbb{K}, (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j$; elles laissent le déterminant invariant.
- (E) les **transpositions** : $C_i \leftrightarrow C_j$ si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j$; elles multiplient le déterminant par -1 .
- (D) les **dilatations** : $C_i \leftarrow \lambda C_i$ si $\lambda \in \mathbb{K}^*$; elles multiplient le déterminant par λ .

Un pivot de Gauss sur les colonnes d'une matrice A aboutit

- * ou bien à une matrice contenant une colonne nulle (et alors $\det(A) = 0$ d'après (i) ou (ii) ;
- * ou bien à l'identité I_n (et alors on peut en déduire la valeur non nulle de $\det(A)$).

Propriété 13 : déterminant manifestement nul

Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle, ou deux colonnes égales, ou proportionnelles, est nul.

Propriété 14 : propriétés du déterminant de matrices

- * $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(A \times B) = \det(A) \det(B).$
- * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$
- * $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$
- * $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A^T) = \det(A).$
- * **Δ** en général, $\det(A + B) \neq \det A + \det B.$

☞ **Remarque :** La propriété $\det(A^T) = \det(A)$ permet d'étendre aux lignes les propriétés et manipulations possibles pour les colonnes dans un déterminant.

Propriété 15 : déterminant par blocs

On considère $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $p + q = n, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, alors

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$$

Δ Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$, la formule $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$ est fausse en général.

Définition : matrice mineure

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $(k, l) \in \{1, \dots, n\}^2$; on appelle **matrice mineure** de A attachée au couple (k, l) , et on note $A_{k,l}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue par suppression de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $l^{\text{ème}}$ colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l} & a_{k-1,l+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,l-1} & a_{k,l} & a_{k,l+1} & \cdots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l} & a_{k+1,l+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice de départ A matrice mineure $A_{k,l}$

Propriété 16 : développement par rapport à une ligne ou une colonne

Avec cette notation,

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

formule de développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne

et

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

formule de développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne

Ceci ramène le calcul d'un déterminant $n \times n$ à celui de n déterminants $(n-1) \times (n-1)$.

Si la colonne ou la ligne choisie est creuse (avec beaucoup de coefficients nuls), cette méthode est beaucoup plus économique.

Quelques exemples (4)

* Après la transformation $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ et un développement par rapport à la troisième ligne, devenue creuse :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

On obtient finalement $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1$.

$$* \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec$$

(combinaison linéaire des diagonales : règle de SARRUS.)

* Avec cette règle des diagonales ou de SARRUS, on peut par exemple déterminer l'équation cartésienne du plan vectoriel P de l'espace engendré par les vecteurs $(1, 1, 2)$ et $(1, -1, 3)$:

$$(x, y, z) \in P \iff \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 3x + 2y - z - (z) - 3y - (-2x) = 5x - y - 2z = 0.$$

Mais dans ce cas, le développement par rapport à la première colonne aurait été tout aussi efficace!

Méthodes de calcul d'un déterminant :

- * Pour $n = 2$ et $n = 3$: règle de SARRUS **⚠** cette règle n'est pas applicable si $n \geq 4$.
- * Pour tout $n \in \mathbb{N}$: effectuer des opérations de pivot de Gauss, indifféremment sur les lignes et les colonnes, jusqu'à obtenir une matrice triangulaire (éventuellement par blocs).
- * Si on voit apparaître une colonne ou une ligne creuse, on peut utiliser un développement par rapport à cette ligne ou colonne.

Complexité temporelle du calcul du déterminant

- * Le calcul d'un déterminant $n \times n$ en se ramenant à n déterminants mineurs $(n-1) \times (n-1)$, puis à $n(n-1)$ déterminants mineurs $(n-2) \times (n-2)$, etc. aboutit à une somme de $n!$ termes formés de n facteurs, donc $n!(n-1)$ multiplications, ce qui est intolérable pour $n \geq 5$ (calcul humain) ou $n \geq 10$ (ordinateur).
- * Le calcul d'un déterminant $n \times n$ en le décomposant par blocs (un bloc de taille k et un bloc de taille $n-k$) divise le nombre de calculs précédents par $\binom{n}{k}$.
- * Le calcul d'un déterminant $n \times n$ par pivot de Gauss (ce qui aboutit à une matrice triangulaire) nécessite $n(n+1)/2$ opérations sur les lignes, donc moins de $n^2(n+1)/2$ multiplications sur les scalaires.

Nombre de multiplications nécessaires au calcul d'un déterminant d'ordre n :

taille	n	3	4	5	10	100	1000
méthode naïve	$n!(n-1)$	12	72	480	3.26×10^7	9.24×10^{159}	4.02×10^{2570}
pivot de Gauss	$\lfloor n^3/2 \rfloor$	14	32	63	500	5.10^5	5.10^8

À quoi servent les déterminants?

- * **En géométrie** : vérifier que n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ forment une base.
Vérifier que quatre points sont coplanaires dans l'espace, etc. Calculer une aire ou un volume.

- * **En algèbre** : vérifier l'inversibilité d'une matrice.
Résoudre un système d'équations linéaires (méthode de CRAMER).
Aide à la réduction d'une matrice (voir le chapitre 2).
Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace.
- * **En analyse** : le déterminant peut être utile à la résolution d'un système d'équations différentielles.

4 — Déterminant d'une famille de vecteurs / d'un endomorphisme

Définition : déterminant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension n , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et φ un endomorphisme de E .
Par définition, le **déterminant de l'endomorphisme** φ est celui de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

⚠ Comme $\det(A) = \det(A')$ si $A \sim A'$, le déterminant de φ ne dépend pas du choix de la base.

Définition : déterminant d'une famille de vecteurs

On considère un espace vectoriel E de dimension n , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit C_j le vecteur-colonne des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est C_j .

Le **déterminant de la famille** $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est par définition, celui de la matrice A , c'est-à-dire celui de l'endomorphisme défini par $\varphi(e_k) = u_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Propriété 17 : du déterminant d'un endomorphisme

soit φ et ψ deux endomorphismes, et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $\det(\varphi) = 0 \iff \varphi$ est un automorphisme, et $\det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det \varphi}$;
- $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \det(\psi)$;
- $\det(\lambda \varphi) = \lambda^n \det(\varphi)$.

5 — Matrices semblables

Définition : matrices semblables

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B **sont semblables**, et on note $A \sim B$, lorsque

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{c'est-à-dire}$$

A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Propriété 18 : similitude et déterminant

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Si $A \sim B$, alors $\det(A) = \det(B)$.

⚠ La réciproque est fausse.

Propriété 19 : matrices semblables

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \sim \lambda I_n \iff A = \lambda I_n$;
- Deux matrices déduites l'une de l'autre par pivot de Gauss ne sont pas semblables en général.

Définition : trace d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la **trace** de A est la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$

Propriété 20 : propriétés de la trace

Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

- * $\text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ * $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$
- * $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$, ⚠ mais en général $\text{tr}(A \cdot B) \neq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.
- * Si $A \sim B$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, ⚠ mais la réciproque est fausse!

Définition : trace d'un endomorphisme

soit $u \in \mathcal{L}(E)$, associé à une matrice A , la **trace de u** est par définition la trace de A .

📖 **Remarque** : Cette définition a un sens car la trace de la matrice de u est invariante par changement de base.