CHAPITRE 1 DÉTERMINANTS (EXEMPLES) 2024/2025

1 — Déterminant à damier

On considère un réel x, et le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Calculer D sous la forme la plus factorisée possible.

Après échange des deuxième et troisième lignes, puis des deuxième et troisième colonnes :

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2+x)$$

2 — Un déterminant de Cauchy

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, dont on cherche à calculer le déterminant.

Effectuer les transformations $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, et mettre en facteur $\dfrac{1}{3}$ dans C_2 et $\dfrac{1}{6}$ dans C_3.
Effectuer ensuite $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, et achever le calcul.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{3}{10} \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=}} \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{15} \end{vmatrix} = \frac{-1}{12 \times 6 \times 15} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Alors $\det(M) = \boxed{\dfrac{-1}{12 \times 6 \times 15}\left(2 - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{12 \times 6 \times 15 \times 2} = \dfrac{1}{2160}}$

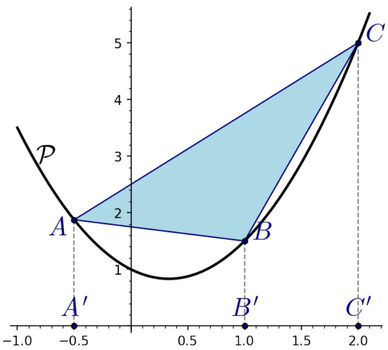
Remarque : Un calcul un tantinet plus long donne, pour le déterminant de $H_7 = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 7}$, le déterminant $\det(H_7) = \dfrac{1}{2067909047925770649600000} \approx 4.10^{-25}$, ce qui permet de tester les algorithmes d'inversion de matrices.

3 — Calcul d'une aire à l'aide d'un déterminant

Soit A, B, C trois points du plan (affine euclidien) muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, de coordonnées respectives $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$.

Alors l'aire de [la surface limitée par] le triangle ABC est la valeur absolue de la moitié du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}$.

On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, et les points A, B, C de $\mathscr{P}$ d'abscisses respectives a, b, c (trois réels distincts). On appelle A', B', C' les points de coordonnées $(a, 0), (b, 0)$ et $(c, 0)$. On demande de démontrer que l'aire de [la surface limitée par] le triangle ABC est égal à $\dfrac{\alpha}{2} A'B'\,A'C'\,B'C'$, où $A'B'$ est la longueur du segment $A'B'$.



En utilisant l'indication, on obtient que l'aire recherchée est $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} \operatorname{abs} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \alpha a^2 + \beta a + \gamma & \alpha b^2 + \beta b + \gamma & \alpha b^2 + \beta b + \gamma \end{vmatrix}$.

La transformation $L_3 \leftarrow L_3 - \beta L_2 - \gamma L_1$, puis la mise en facteur de α dans la troisième ligne, montre que

$\mathscr{A} = \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{abs} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{abs}(c-a)(c-b)(b-a)$ soit, en fonction de longueurs géométriques, $\mathscr{A} = \boxed{\dfrac{\alpha}{2} A'B' \times A'C' \times B'C'}$.