CHAPITRE 1 ESPACES VECTORIELS 2024/2025

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 — Familles libres et génératrices, bases, dimension

Définition : famille

Une ***famille*** d'éléments de E est une application d'un ensemble I d'indices dans E, notée $(e_i)_{i\in I}$.
La famille est ***finie*** lorsque I est de cardinal fini.
Lorsque $I = [\![1,n]\!] = \{1,2,\dots n\}$, on parle aussi de ***système***; lorsque $I = \mathbb{N}$, on parle aussi de ***suite***.

Définition : famille finie libre

Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments (ou vecteurs) de E.
On dit que $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille ***libre*** ou ***linéairement indépendante*** lorsque

$$\forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 0)$$

Définition : famille quelconque libre

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments (ou vecteurs) de E.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille ***libre*** lorsque toute famille finie extraite de E est libre.

Exemple 1

La famille $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, X, X^2, \dots\right)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
En effet, soit une famille finie $(X_{i_1},\dots,X_{i_n})$ extraite de $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n = m$: alors cette famille est incluse dans $(1, X, \dots, X^m)$, qui est libre, puisque $\sum_{k=0}^{m} a_k X^k = 0 \Longrightarrow (a_0 = a_1 = \cdots = a_m = 0)$.

Définition : famille liée

Une famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments (ou vecteurs) de E est dite ***liée*** lorsqu'elle n'est pas libre.

Définition : famille génératrice

Une famille $\mathscr{G} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments (ou vecteurs) de E ***est génératrice de*** E ou ***engendre*** E lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{G}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \exists (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

On note alors $E = \operatorname{Vect}\left((u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$.

Quelques propriétés. Soit $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux familles : on écrira ici, par abus de notation que $(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0) \cup (x_1, x_2, \dots)$ et $(x_1, x_2, \dots) \subset (x_0, x_1, x_2, \dots)$, comme si les familles étaient des ensembles.

- Si $\mathscr{F}$ est libre et que $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$, alors $\mathscr{F}'$ est libre;
- Toute famille contenant $\{0_E\}$ est liée;
- si $\mathscr{F}$ est génératrice de E et que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$, alors $\mathscr{F}'$ est génératrice de E;
- si $\mathscr{F}$ est libre, et $x \in E$, la famille $\{x\} \cup \mathscr{F}$ est libre si, et seulement si, $x \notin \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

Définition : bases

$\mathscr{F}$ est une ***base*** de E lorsque $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de E.

Propriété 1 : bases échelonnées de l'espace $\mathbb{K}[X]$

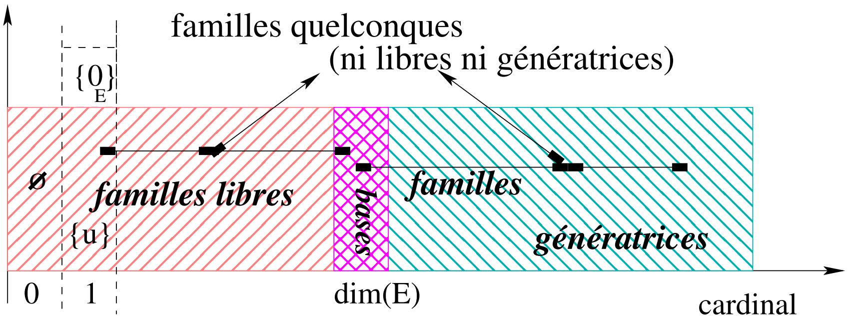
* La famille $\left(X^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de l'espace $\mathbb{K}[X]$, appelée ***base canonique de*** $\mathbb{K}[X]$.
* Plus généralement, soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes tels que $\deg P_k = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (on dit que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ***échelonnée en degré***), alors la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Définition : dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel; si E admet une famille génératrice finie, on dit ***que*** E ***est de dimension finie***; sinon, E est ***de dimension infinie***.

Théorème 1.1 de la dimension

Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal fini, appelé ***dimension de*** E.
Si $E = \{0_E\}$, alors E a pour seule base $\varnothing$, et on dit que $\dim E = 0$.



On obtient alors une base de E :

- en utilisant **le théorème de la base incomplète** : soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E, et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E ; alors il existe une sous-famille $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{B} = \mathscr{L} \cup \mathscr{G}'$ est une base de E.
- ou bien en enlevant des éléments d'une famille génératrice $\mathscr{G}$ de E, en prenant garde à conserver le caractère générateur de la famille ainsi obtenue.

2 — Produit et somme d'espaces vectoriels

Définition : produit de sous-espaces

Soit $(E_1, E_2, \dots E_p)$ une famille finie d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, alors le ***produit des*** $E_i, 1 \leqslant i \leqslant p$, est

$$\prod_{i=1}^{p} E_i = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p = \left\{(x_1, \dots, x_p), \quad \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E_i\right\}$$

C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Propriété 2 : dimension d'un produit de sous-espaces

Si tous les E_i sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors
$\dim\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$

Définition : somme de sous-espaces

Soit $(E_1, E_2, \dots E_p)$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E, alors la ***somme des*** $E_i, 1 \leqslant i \leqslant p$, est

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = \left\{\sum_{i=1}^{p} x_i, \quad (x_1, x_2 \dots x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p\right\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E, le plus petit qui contienne tous les $E_i, 1 \leqslant i \leqslant p$.

Définition : somme directe

On dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est ***directe*** lorsque l'écriture $\quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i, \quad (x_1, x_2 \dots x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$
est unique, *ie*

$$\forall \left((x_1, x_2 \dots x_p), (y_1, y_2 \dots y_p)\right) \in (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p)^2, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} y_i = \sum_{i=1}^{p} x_i\right) \Longrightarrow \left(\forall i \in [\![1, p]\!], \quad x_i = y_i\right)$$

On note alors $\sum_{i=1}^{p} E_i = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Propriété 3 : caractérisation des sommes directes

La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si, et seulement si,

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E\right) \Longrightarrow \left(x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E\right).$$

ce qui revient à dire que la décomposition de 0_E suivant les espaces E_i est unique.

Propriété 4 : cas $p=2$

$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F+G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$.

Cette propriété ne s'étend pas au cas $p \geqslant 3$:
il ne suffit pas que $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{0_E\}$ pour que la somme $A+B+C$ soit directe.
(Imaginer par exemple le cas de trois droites vectorielles distinctes du plan).

Propriété 5 : formule de Grassmann ou des quatre dimensions

Soit F et G deux espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Propriété 6 : dimension d'une somme de sous-espaces

Soit $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces de dimension finie d'un espace vectoriel E, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

Il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si, et seulement si, la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe :

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$$

Définition : sous-espaces supplémentaires

On dit que les sous-espaces $(E_1, E_2, \ldots E_p)$ sont ***supplémentaires dans*** E lorsque $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E$.

Ceci revient à dire que $\forall x \in E, \quad \exists!(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots E_p, \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

Exemple 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et les sous-espaces vectoriels de E :
$\mathscr{P} = \left\{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\right\}$ (*fonctions paires*) et $\mathscr{I} = \left\{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)\right\}$ (*fonctions impaires*).
Alors $E = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$: $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans E.
Pour le démontrer, on utilise la propriété 3 et la décomposition de $f \in E$ en somme d'une fonction paire et d'une impaire résultant de

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Exemple 3

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $P \in E \setminus \{0\}$ un polynôme de degré $n+1$, et les sous-espaces :
$F = P\mathbb{K}[X] = \{PQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ et $G = \mathbb{K}_n[X] = \{R \in \mathbb{K}[X], \deg R \leqslant n\}$. Alors F et G sont supplémentaires dans E.
Pour démontrer $E = F+G$, on utilise la propriété 3 et la décomposition de $T \in E$ résultant de la division euclidienne par $T = PQ + R$, en remarquant que $(PQ, R) \in F \times G$.

Définition : base adaptée [à un sous-espace]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace de E de dimension $p \leqslant n$.
Il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ telle que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base de F.
Une telle base est appelée ***base de*** E ***adaptée à*** F.

☞ ***Remarque :*** cet énoncé est équivalent au théorème de la base incomplète.

Définition : base adaptée [à une décomposition en somme directe]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, qui admet une décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

Alors il existe une base de E, qui est formée par la juxtaposition de bases de chacun des espaces vectoriels E_k.

Une telle base est appelée ***base de*** E ***adaptée à la décomposition*** $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$.

☞ ***Remarque :*** l'existence d'une telle base est une condition nécessaire et suffisante à la décomposition en somme directe.

3 — Image et noyau d'une application linéaire

Définition : Image et noyau d'une application linéaire

Soit u une application linéaire de E dans F.
Le ***noyau de*** u est $\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, u(x) = 0_F\}$: c'est un sous-espace vectoriel de E.
L'***image de*** u est $\mathrm{Im}(u) = u(F)$: c'est un sous-espace vectoriel de F.

Propriété 7 : noyau, image, injectivité, surjectivité

Soit u une application linéaire de E dans F.
$*$ u est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$ $*$ u est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}\, u = F$

Propriété 8 : isomorphisme fondamental

Soit u une application linéaire de E dans F, et S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ (d'existence supposée) ; alors u définit un isomorphisme $\tilde{u}$ de S sur $\mathrm{Im}\, u$.

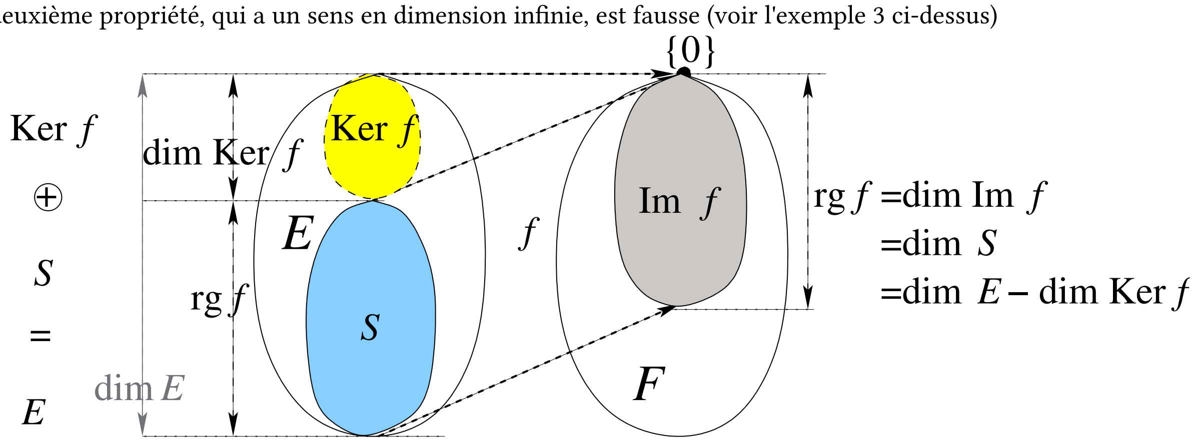
Exemple 4

On considère $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et u l'endomorphisme de E défini par $u(f) = f'$.
Alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathscr{K} = \{f \in E, f \text{ constante}\}$, et $\mathrm{Im}\, u = E$. Soit alors $S = \{f \in E, f(0) = 0\}$.
La décomposition $f = f - f(0) + f(0)$ montre $E = S + \mathscr{K}$; or $S \cap \mathscr{K} = \{0_E\}$, donc S est un supplémentaire de $\mathscr{K}$.
L'application $\tilde{u} : S \to E$ définie par $\tilde{u}(f) = f'$ est un isomorphisme, d'application réciproque définie par
$(\tilde{u})^{-1}(g) : x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 9 : conséquences en dimension finie

Si $\dim E < +\infty$:
- $*$ $\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u) = \dim E$ (***formule du rang***) ;
- $*$ Si $\dim E = \dim F$, alors (u injective) $\Longleftrightarrow$ (u surjective) $\Longleftrightarrow$ (u bijective)

La formule du rang n'a évidemment pas de sens en dimension infinie ;
la deuxième propriété, qui a un sens en dimension infinie, est fausse (voir l'exemple 3 ci-dessus)



4 — Équations linéaires

4.1 – Définition, résolution

Définition : équation linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et $b \in F$. On considère l'équation en $x \in E$:
$\mathcal{V} : f(x) = b$, dite ***équation linéaire de second membre*** b.

Définition et propriété : équation sans second membre

On appelle équation ***homogène*** ou ***sans second membre*** associée à $\mathcal{V}$ l'équation en $x \in E$: $\mathcal{V}_0 : f(x) = 0_F$.
L'ensemble des solutions de $\mathcal{V}_0$ est le noyau $\mathrm{Ker} f$ de f.

Propriété 10 : espace des solutions de $\mathcal{V}$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $\mathcal{V}$ est :
- ▷ l'ensemble vide $\emptyset$ si $b \notin \mathrm{Im} f$ (*équation non compatible*)
- ▷ $x_0 + \mathrm{Ker} f = \left\{x_0 + u, u \in \mathrm{Ker} f\right\}$ si $b \in \mathrm{Im}(f)$, donc si $\exists x_0 \in E, b = f(x_0)$. (*équation compatible*)

Vocabulaire

- Une condition équivalente à $b \in \operatorname{Im}(f)$ est appelée ***condition de compatibilité*** de l'équation $f(x) = b$.
- Dans le cas où $\mathcal{V} : f(x) = b$ est compatible, $\mathcal{S}$ est un ***espace affine***.
  Tout vecteur x_0 de E tel que $f(x_0) = b$ est appelé ***origine de*** $\mathcal{S}$ et $\operatorname{Ker} f$ est ***la direction de*** $\mathcal{S}$.
- Deux espaces affines de même direction (ou de directions incluses l'une dans l'autre) sont dits ***parallèles***. En particulier, les équations compatibles $f(x) = b_1$ et $f(x) = b_2$ ont des espaces de solutions parallèles.

Exemple 5

Une équation différentielle
On considère l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.
C'est une équation linéaire, avec $E = F = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $f : y \mapsto y'' - 3y' + 2y$, et $b = x \mapsto \mathrm{e}^x$.
L'équation homogène associée est $y'' - 3y' + 2y = 0$. On montre que l'espace des solutions de cette équation homogène est le plan vectoriel $\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\right)$.
Or, si $y_0(x) = -x\mathrm{e}^x$, alors $y_0''(x) - 3y_0'(x) + 2y_0(x) = -(x + 2 - 3(x+1) + 2x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, donc $f(y_0) = b$.
L'équation est compatible, et l'ensemble des solutions est le plan affine $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto -x\mathrm{e}^x + \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}$.

Exemple 6

Une relation de récurrence
On considère la relation de récurrence $u_{n+1} - 2u_n = (-1)^n$.
C'est une équation linéaire, avec $E = F = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $f : (u_n) \mapsto \left(u_{n+1} - 2u_n\right)$, et $b = x \mapsto \left((-1)^n\right)$.
L'équation homogène associée est $u_{n+1} - 2u_n = 0$. L'espace des solutions est la droite vectorielle des suite géométriques de raison 2.
On constate que $f\left((-1)^n\right) = \left((-1)^{n+1} - 2(-1)^n\right) = -3(-1)^n$, donc $f\left(\frac{-1}{3}(-1)^n\right) = (-1)^n$.
L'équation est compatible, et l'ensemble des solutions est la droite affine $\mathcal{S} = \left\{\frac{-1}{3}(-1)^n + \lambda\, 2^n \lambda \in \mathbb{C}\right\}$.

Exemple 7

Un système d'équations
On considère le système $\begin{cases} x - 2y + z & = 3 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$. C'est une équation linéaire, f étant l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et avec $b = (1, 0)$.
On remarque que $b \in \operatorname{Im}(f)$, par exemple $f(1, -1, 0) = (1, 0)$. Donc le système est compatible.
De plus, $\operatorname{Ker} f$ est de dimension $3 - \operatorname{rg}(f) = 1$; on obtient $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, 0, -1)$.
L'ensemble des solutions est la droite affine $\mathcal{S} = \left\{(1, -1, 0) + \lambda(1, 0, -1)\lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Exemple 8

Un autre système d'équations
On considère $\beta \in \mathbb{R}$, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, et le système $\begin{cases} (1) & x + y & = 1 \\ (2) & x - 2y & = 0 \\ (3) & x + 4y & = \beta \end{cases}$.
C'est une équation linéaire, f étant l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice M, et avec $b = (1, 0, \beta)$.
Un pivot de Gauss permet de remarquer que $2(1) - (2) - (3)$ s'écrit $0 = 2 - \beta$, donc le système est compatible si et seulement si $\beta = 2$, et son unique solution est alors le singleton $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

Exemple 9

La division vectorielle
Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle. On considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de E, et l'équation linéaire en $\vec{x} \in E : \mathcal{V} : \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$. L'application linéaire correspondante est $f : \vec{x} \mapsto \vec{a} \wedge \vec{x}$.
Cette équation ne peut pas avoir de solution si $\vec{b} \not\perp \vec{a}$.
Réciproquement, si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, on vérifie que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) = (\vec{a}^2)\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} = (\vec{a}^2)\vec{b}$, donc, avec $\vec{x}_0 = \dfrac{1}{\vec{a}^2}\vec{b} \wedge \vec{a}$, $f(\vec{x}_0) = \vec{b}$: $\vec{b} \in \operatorname{Im} f$, et l'équation est alors compatible. De plus, $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}.\vec{a}$. Finalement, l'ensemble des solutions de $\mathcal{V}$ est :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0 \\ \text{la droite affine } \left\{\dfrac{1}{\vec{a}^2}\vec{b} \wedge \vec{a} + \lambda\vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{si } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}.$$

5 — Hyperplans

Définition : hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Un sous-espace vectoriel H de E est un ***hyperplan*** si, et seulement si :

$\boxed{\dim H = n-1}$ c'est-à-dire $\boxed{H \text{ est un supplémentaire d'une droite vectorielle}}$.

Propriété 11 : équation d'un hyperplan

Toute équation d'un hyperplan en dimension finie ($n = \dim E$), muni d'une base $\mathscr{B}$, est de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, x_k = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0 \qquad \text{où } (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

(E_H) est appelée ***une équation cartésienne de l'hyperplan*** H.

☞ ***Remarque :*** Un hyperplan n'a pas d'équation unique : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda\, a_k x_k = 0$ est UNE équation de H.

Propriété 12 : équations d'un sous-espace vectoriel

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n-p$.
Réciproquement, soit F un sous-espace de E, de dimension $n-p$. Il existe alors p hyperplans $H_1, H_2, \ldots H_p$ tels que $F = \bigcap_{k=1}^{p} H_k$. En notant (E_i) : $\sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} x_k = 0$ une équation de l'hyperplan H_i, on obtient alors qu'un système d'équations définissant F est

$$\begin{cases} a_1^{(1)} x_1 + a_2^{(1)} x_2 + \cdots + a_n^{(1)} x_n = 0 \\ a_1^{(2)} x_1 + a_2^{(2)} x_2 + \cdots + a_n^{(2)} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{(p)} x_1 + a_2^{(p)} x_2 + \cdots + a_n^{(p)} x_n = 0 \end{cases}$$

Exemple 10

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, on considère la droite vectorielle D dirigée par $u = (1, -1, 2)$.
u appartient à deux hyperplans différents : H_1, d'équation $x + y = 0$ et H_2, d'équation $2y + z = 0$, *ie* $D = H_1 \cap H_2$.
Donc D est défini par le système d'équations $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$.

Exemple 11

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les hyperplans : H_1, d'équation $x + y - z + t = 0$, H_2, d'équation $x - y + z - 2t = 0$ et H_3, d'équation $x - t = 0$. Clairement, $H_1 \neq H_2$; $(x, y, z, t) \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x + y - z + t + x - y + z - 2t = x - t = 0 \Rightarrow (x, y, z, t) \in H_3$, donc $H_1 \cap H_2 \subset H_3$. Alors $\boldsymbol{F = H_1 \cap H_2 \cap H_3 = H_1 \cap H_2}$ **est un espace de dimension $\mathbf{4 - 2 = 2}$** (et non $4 - 3 = 1$).

$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + z - 2t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ définit un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.