CHAPITRE 1 ALGÈBRE LINÉAIRE (EXEMPLES) 2024/2025

1 — Un système linéaire

Soit $(a,b,c,d,e,m) \in \mathbb{R}^6$, on considère le système (Σ) d'inconnues $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \mathbb{R}^6$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4+2x_5+x_6 &= a \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4+x_5-x_6 &= b \\ x_2-x_3+x_4+x_5+x_6 &= c \\ x_1+x_2+x_5 &= d \\ x_1-x_2+mx_3-2x_4-x_5-2x_6 &= e \end{cases}, \text{ soit } A.X = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre un tel système linéaire, on peut effectuer un pivot de Gauss sur les lignes de la matrice augmentée

$$M = (A|B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 1 & -1 & m & -2 & -1 & -2 & e \end{array}\right). \quad M \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & b \\ 1 & -1 & m & -2 & -1 & -2 & e \end{array}\right) \underset{L}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & a-d \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & b-2d \\ 0 & -2 & m & -2 & -2 & -2 & e-d \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & c \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & a-d-c \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & b-2d+c \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m-2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & e-d+2c \end{array}\right)$$

Il en résulte que :

- $*$ si $m=2$, alors $\operatorname{rg}(A)=2$ et le système n'a de solution que si $e-d+c=b-2d+c=a-d-c=0$ (conditions de compatibilité).

  Il est alors équivalent à $\begin{cases} x_1+x_2+x_5 &= d \\ x_2-x_3+x_4+x_5+x_6 &= c \end{cases}$, soit à $x_2 = x_3-x_4-x_5-x_6+c$ et $x_1 = d-x_2-x_5 = d-c-x_3+x_4+x_6$, c'est-à-dire, en posant $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (x_3,x_4,x_5,x_6)$: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} d-c \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $*$ Si $m \neq 2$, alors $\operatorname{rg}(A)=3$ et le système n'a de solution que si $e-d+c=b-2d+c=0$ (conditions de compatibilité).

  Il est alors équivalent à $\begin{cases} x_1+x_2+x_5 &= d \\ x_2-x_3+x_4+x_5+x_6 &= c \\ (m-2)x_3 &= e-d+2c \end{cases}$.

  Les solutions du système sont, avec $(\alpha,\beta,\gamma) = (x_4,x_5,x_6)$: $\boldsymbol{X} = \dfrac{1}{m-2} \begin{pmatrix} 0 \\ (m-2)d+(m+1)c+e \\ e-d+2c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 — Noyau et image d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche à déterminer une base du noyau et de l'image de $\operatorname{Ker}(A)$ *et* $\operatorname{Im}(A)$.

Pour une base de l'image, effectuons un pivot de Gauss sur *les colonnes* de A :

$$A \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une base de $\operatorname{Im}(A)$ est obtenue avec les colonnes non nulles après ce pivot : $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour une base du noyau, effectuons un pivot de Gauss sur *les lignes* de A :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de A est défini par le système « simplifié » $\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = x_4 - x_5 + x_6 \\ x_2 & = -x_3 + x_5 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_1 & = -2x_3 + x_4 + x_6 \\ x_2 & = -x_3 + x_5 \end{cases}$, donc

$X \in \mathrm{Ker}\,(A) \Longleftrightarrow \exists (x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^4, x = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

3 — Diviseurs de zéro

1. On considère un espace vectoriel E de dimension finie n et deux endomorphismes f et g de E, non nuls, tels que $f \circ g = g \circ f = 0$.
   Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$ *et que* $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
2. Soit A et B deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A \times B = B \times A = (0)$; soit $a = \mathrm{rg}\,(A)$ et $b = \mathrm{rg}\,(B)$.
   Montrer que $1 \leqslant a, b \leqslant 2$ *et que* $a + b \leqslant 3$.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.
   Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$ *et de* $\mathrm{Im}\,(A)$. *Déterminer une équation cartésienne de* $\mathrm{Im}\,(A)$. *Trouver une matrice* B *non nulle telle que* $A.B = B.A = (0)$.

---

1. Puisque $g \circ f = 0$, alors pour tout $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $x \in E$, $y = f(x)$ donc $g(y) = g(f(x) = 0$; $\mathbf{Im}\,(\boldsymbol{f}) \subset \mathbf{Ker}\,(\boldsymbol{g})$.
   De même, par échange de f et g, $\mathbf{Im}\,(\boldsymbol{g}) \subset \mathbf{Ker}\,(\boldsymbol{f})$.
2. En appelant f et g les endomorphismes associés respectivement à A et B, $\dim \mathrm{Im}\,(f) = a$ et $\dim \mathrm{Ker}\,(f) = n - \dim \mathrm{Im}\,(f) = n - a$; de manière analogue, $\dim \mathrm{Im}\,(g) = b$ et $\dim \mathrm{Ker}\,(g) = n - b$.
   Comme $A \times B = B \times A = (0)$, A et B ne sont pas inversibles donc $a \leqslant 2$ et $b \leqslant 2$; et A et B ne sont pas nulles donc $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. De plus, d'après la question précédente, $a \leqslant 3 - b$ donc $a + b \leqslant 3$. On peut en conclure que $\boldsymbol{\{a, b\} = \{1, 2\}}$ **ou bien** $\boldsymbol{a = b = 1}$.
3. Soit A_1, A_2, A_3 les colonnes de A. On remarque que A_1 et A_2 ne sont pas proportionnelles, et que $A_1 + A_2 - A_3 = (0)$, ce qui montre que $\boldsymbol{(A_1, A_2)}$ **est une base de** $\mathbf{Im}\,\boldsymbol{(A)}$; bien sûr, $\mathrm{rg}\,(A) = 2$ et d'après la formule du rang, $\dim \mathrm{Ker}\,(A) = 1$.
   De plus, en posant $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A.W = A_1 + A_2 - A_3 = (0)$, donc $\mathbf{Ker}\,\boldsymbol{(A)} = \mathbf{Vect}\,\boldsymbol{(W)} = \mathbf{Vect}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.
   On peut obtenir une équation cartésienne de $\mathrm{Im}\,(A)$ en annulant le déterminant $\det(A_1, A_2, X) = 0$;
   or $\det(A_1, A_2, X) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & x \\ 1 & -4 & y \\ -1 & 5 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ -1 & 5 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ & 5 & x+2z \end{vmatrix} = x + 2z - 5(y+z)$, donc une équation cartésienne de $\mathrm{Im}\,(A)$ est $\boldsymbol{x - 5y - 3z = 0}$.
   Une matrice B non nulle telle que $A.B = B.A = (0)$ vérifie nécessairement $\mathrm{Im}\,(B) = \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(W)$, donc $\mathrm{rg}\,(B) = 2$, et $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,(B)$, donc nécessairement $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,(B)$. Les colonnes de B, B_1, B_2, B_3, sont donc multiples de W : $B_1 = \alpha_1 W, B_2 = \alpha_2 W$ et $B_3 = \alpha_3 W$, avec de plus
   $B.A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) W = (0)$, et $B.A_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = (-5\alpha_1 - 4\alpha_2 + 5\alpha_3) W = (0)$.
   $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vérifient donc le système $\begin{cases} (1) & 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ (2) & -5\alpha_1 - 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 4(1) + (2) & 3\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 5(1) - 2(2) & -3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$,
   ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = k(-1, 5, 3)$ donc $\boldsymbol{B = k \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}}$.
   Remarque : les lignes de B sont colinéaires aux coefficients de l'équation de $\mathrm{Im}\,(A)$ trouvée ci-dessus.